Pro Gradu
Kvantifiointi määriteltävien relaatioiden yli

Ville Hakulinen

24.03.1995

1. Kvantifiointi määriteltävien relaatioiden yli

Tämä tutkielma käsittelee kahta toisen kertaluvun logiikan muotoa, joissa kaavat tulkitaan hieman eri tavalla kuin normaalissa toisen kertaluvun logiikassa. Näistä logiikoista käytetään nimiä *ED* ja *EDP*. Tavallisessa toisen kertaluvun logiikassa väite $\mathcal{M} \models \exists X \phi(X)$ tarkoittaa, että on olemassa relaatio X, joka toteuttaa kaavan ϕ, kun taas logiikassa *ED* vaaditaan, että kaavan toteuttava relaatio X on määriteltävissä struktuurissa $\mathcal{M}$ ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavalla ilman parametreja. Logiikassa *EDP* kvantifiointi ulotetaan koskemaan myös parametrien avulla määriteltävissä olevia relaatioita.

Tämän tutkielman päätulokset, ovat seuraavat:

(1) Validisuus ei säily logiikkojen *ED* ja *EDP* kohdalla kielen laajennuksissa päinvastoin kuin ensimmäisen kertaluvun logiikassa.
(2) Luonnollisten lukujen standardimalli voidaan karakterisoida logiikoissa *ED* ja *EDP*.
(3) Sekä (ED, L)-validien että (EDP, L)-validien kaavojen joukko on Π^1_1-täydellinen, kun L on mielivaltainen numeroituva aakkosto.
(4) Sekä logiikan *ED* että logiikan *EDP* Δ-sulkeuma on sama kuin logiikan $L(Q_0)$ Δ-sulkeuma.
(5) Kumpikaan logiikoista *ED* ja *EDP* ei ole Δ-suljettu.

Tutkielman pohjana on Per Lindströmin artikkeli [4], jossa tulokset (1)-(3) on esitetty. Tulokset (4)-(5) perustuvat Jouko Väänäsen artikkeliin [8].

1.1. Aakkostot. Termi, atomikaava ja kaava

Tutkielman todistuksissa tarvitaan useita syntaksiltaan toisistaan poikkeavia logiikoita. Nämä ovat:

$L_{\omega\omega}$	Ensimmäisen kertaluvun logiikka
$L^S_{\omega\omega}$	Syntaksiltaan yksinkertaistettu ensimmäisen kertaluvun logiikka
$L^F_{\omega\omega}$	Ensimmäisen kertaluvun logiikka, jossa saa esiintyä vapaana toisen kertaluvun muuttujia
$L(Q_0)$	Ensimmäisen kertaluvun logiikka, johon on lisätty yleistetty kvanttori 'on olemassa äärettömän monta'
$L^F(Q_0)$	Sama kuin $L(Q_0)$, mutta lisäksi sallitaan toisen kertaluvun muuttujien esiintyminen vapaana
L_{SO}	Toisen kertaluvun logiikka
L^S_{SO}	Syntaksiltaan yksinkertaistettu toisen kertaluvun logiikka
$L_{\omega_1\omega}$	Ääretön kieli, jossa sallitaan äärettömän pitkien konjunktioiden ja disjunktioiden muodostaminen sellaisten kaavajoukkojen yli, joissa esiintyy äärellinen määrä vapaita muuttujia.
$L^F_{\omega_1\omega}$	Sama kuin $L_{\omega_1\omega}$, mutta lisäksi sallitaan toisen kertaluvun muuttujien esiintyminen vapaana.

Aakkostoksi kutsutaan mitä tahansa joukkoa L vakio-, funktio- ja relaatiosymboleita. L-termien joukoksi kutsutaan pienintä joukkoa T_L, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $v_n \in T_L$, kun $n \in \mathbb{N}$
(2) $c \in T_L$, kun $c \in L$ on vakiosymboli
(3) $f(t_1, ..., t_n) \in T_L$, kun $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, ..., t_n \in T_L$

Symboleita v_n sanotaan ensimmäisen kertaluvun muuttujiksi ja näiden asemesta käytetään usein symboleita $x, y, z, u, x_n, y_n, z_n, u_n$.

$L_{\omega\omega}$-atomikaavojen joukoksi kutsutaan pienintä joukkoa $A_{L_{\omega\omega}}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $R(t_1, ..., t_n) \in A_L$, kun $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_1, ..., t_n \in T_L$
(2) $t_1 = t_2 \in A_L$, missä $t_1, t_2 \in T_L$

L_{SO}-atomikaavojen joukko $A_{L_{SO}}$ on pienin joukko, joka toteuttaa edellämainitut ehdot (1) ja (2) sekä lisäksi ehdon:

(3) $V_n^m(t_1, ..., t_m) \in A_L$, kun $m - 1, n \in \mathbb{N}$ ja $t_1, ..., t_m \in T_L$

Symbolit V_n^m ovat toisen kertaluvun muuttujia ja niiden asemesta käytetään usein symboleita $X, Y, Z, U, X_n, Y_n, Z_n, U_n$.

$L_{\omega\omega}^S$-atomikaavojen joukko $A_{L_{\omega\omega}^S}$ on pienin joukko, joka toteuttaa ehdot:

(1) $R(v_{i_0}, ..., v_{i_n})$, kun $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $i_j \in \mathbb{N}$, kun $0 \leq j \leq n$.
(2) $f(v_{i_0}, ..., v_{i_n}) = v_{i_{n+1}}$, kun $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $i_j \in \mathbb{N}$, kun $0 \leq j \leq n + 1$.
(3) $c = v_j$, kun c on vakiosymboli ja $j \in \mathbb{N}$.

L_{SO}^S-atomikaavojen joukko $A_{L_{SO}^S}$ on pienin joukko, joka toteuttaa edellämainitut ehdot (1), (2) ja (3) sekä lisäksi ehdon:

(4) $V_n^m(v_{i_0}, ..., v_{i_j}) \in A_L$, kun $m - 1, n \in \mathbb{N}$ ja $i_k \in \mathbb{N}$, kun $0 \leq k \leq j$.

Olkoon A jokin edellämainituista atomikaavajoukoista. Liiteään tähän joukkoon joukko $F_{\omega\omega}(A)$, joka on pienin joukko, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $\phi \in F_{\omega\omega}(A)$, kun $\phi \in A$
(2) $\neg\phi \in F_{\omega\omega}(A)$, kun $\phi \in F_{\omega\omega}(A)$
(3) $\phi \wedge \psi \in F_{\omega\omega}(A)$, kun $\phi, \psi \in F_{\omega\omega}(A)$
(4) $\exists v_n \phi \in F_{\omega\omega}(A)$, kun $\phi \in F_{\omega\omega}(A)$ ja $n \in \mathbb{N}$

Vastaavasti jokaiseen atomikaavajoukkoon A liitetään kaavajoukko $F_{SO}(A)$, jonka muodostamisessa käytetään edellämainittuja sääntöjä ja lisäksi sääntöä:

(5) $\exists V_n^m \phi \in F_{SO}(A)$, kun $\phi \in F_{SO}(A)$ ja $n, m \in \mathbb{N}$

Kaavajoukko $F_{Q(0)}(A)$ muodostetaan käyttämällä sääntöjen (1) - (4) lisäksi sääntöä:

(5) $\quad Q_0 v_n \phi \in F_{\omega\omega}(A)$, kun $\phi \in F_{\omega\omega}(A)$ ja $n \in \mathbb{N}$

Nyt voidaan muodostaa suurin osa tarvittavista kaavajoukoista:

$L_{\omega\omega}$-kaavojen joukko	$F_{L_{\omega\omega}} = F_{\omega\omega}(A_{L_{\omega\omega}})$,
$L^S_{\omega\omega}$-kaavojen joukko	$F_{L^S_{\omega\omega}} = F_{\omega\omega}(A_{L^S_{\omega\omega}})$,
$L^F_{\omega\omega}$-kaavojen joukko	$F_{L^F_{\omega\omega}} = F_{\omega\omega}(A_{L_{SO}})$,
$L(Q_0)$-kaavojen joukko	$F_{L(Q_0)} = F_{Q(0)}(A_{L_{\omega\omega}})$,
$L^F(Q_0)$-kaavojen joukko	$F_{L^F(Q_0)} = F_{Q(0)}(A_{L_{SO}})$,
L_{SO}-kaavojen joukko	$F_{L_{SO}} = F_{SO}(A_{L_{SO}})$ ja
L^S_{SO}-kaavojen joukko	$F_{L^S_{SO}} = F_{SO}(A_{L^S_{SO}})$.

Kaavaksi sanotaan mitä tahansa jonkin kaavajoukon alkiota. Lisäksi on käytössä seuraavat lyhenteet: $\phi \vee \psi$ tarkoittaa kaavaa $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, $\phi \rightarrow \psi$ tarkoittaa kaavaa $\neg\phi \vee \psi$, $\phi \leftrightarrow \psi$ tarkoittaa kaavaa $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$, $\forall x \phi$ tarkoittaa kaavaa $\neg\exists x \neg\phi$ ja $\forall X \phi$ kaavaa $\neg\exists X \neg\phi$.

Äärellisille konjuntioille ja disjunktioille käytetään seuraavia lyhenteitä:
$\bigwedge_{i=n}^{m} \phi_i$ tarkoittaa kaavaa $\phi_n \wedge ... \wedge \phi_m$ ja $\bigvee_{i=n}^{m} \phi_i$ tarkoittaa kaavaa $\phi_n \vee ... \vee \phi_m$.

Myöhemmin tarvitaan $L_{\omega_1\omega}$-kaavojen määritelmässä yleisen konjunktion käsitettä. Jos A on joukko kaavoja, niin $\bigwedge A$ on joukon A alkioiden konjunktio.

Nyt voidaan määritellään vielä vapaan ja sidotun muuttujan käsitteet. Kaavan ϕ alikaavojen joukko saadaan seuraavien sääntöjen avulla:

(i) Jokainen kaava on itsensä alikaava.
(ii) Jos kaava on muotoa $\neg\phi$, niin ϕ on sen alikaava.
(iii) Jos kaava on muotoa $\phi \wedge \psi$, niin ϕ ja ψ ovat sen alikaavoja.
(iv) Jos kaava on muotoa $\exists v_n \phi$, niin ϕ on sen alikaava.
(v) Jos kaava on muotoa $\exists V^m_n \phi$, niin ϕ on sen alikaava.
(vi) Jos kaava on muotoa $Q_0 v_n \phi$, niin ϕ on sen alikaava.
(vii) Jos kaava on muotoa $\bigwedge A$, missä A on kaavajoukko, niin jokainen joukon A alkio sen alikaava.
(viii) Jos ϕ on kaavan θ alikaava ja ψ on kaavan ϕ alikaava, niin ψ on kaavan θ alikaava.

Muuttujan v_n esiintymä kaavassa ϕ on sidottu, mikäli se osuu muotoa $\exists v_n \psi$ olevaan kaavan ϕ alikaavaan. Vastaavasti muuttujan V^m_n esiintymä kaavassa ϕ

on sidottu, mikäli se osuu muotoa $\exists V_n \psi$ olevaan kaavan ϕ alikaavaan. Muussa tapauksessa muuttujan esiintymää sanotaan vapaaksi. Jos muuttujalla v_n on vähintään yksi vapaa esiintymä kaavassa ϕ, sanotaan, että muuttuja on vapaa kaavassa ϕ. Jos muuttujat $x_1, ..., x_n, X_1, .., X_n$ ovat vapaita kaavassa ϕ, kytetään kaavasta merkintää $\phi(x_1, ..., x_n, X_1, ..., X_n)$. Jos kaavassa ei esiinny vapaita muuttujia, kutsutaan sitä myös L-lauseeksi.

Nyt voidaan määritellä $L_{\omega_1\omega}$-kaavojen ja $L^S_{\omega_1\omega}$-kaavojen joukot. Jokaiseen atomikaavajoukkoon A liitetään joukko $F_{\omega_1\omega}(A)$, joka on pienin joukko, joka toteuttaa samat ehdot kuin joukko $F_{\omega\omega}(A)$ aiemmin, mutta (3) korvataan ehdolla:

(3') $\bigwedge B \in F_{\omega_1\omega}(A)$, kun $B \subseteq F_{\omega_1\omega}(A)$, joukko B on numeroituva, ja joukossa esiintyy enintään äärellinen määrä vapaita muuttujia ja relaatiomuuttujia.

Nyt määritellään viimeiset kaksi tarvittavaa kaavajoukkoa:

$L_{\omega_1\omega}$-kaavojen joukko	$F_{L_{\omega_1\omega}} = F_{\omega_1\omega}(A_{L_{\omega\omega}})$,
$L^F_{\omega_1\omega}$-kaavojen joukko	$F_{L^F_{\omega_1\omega}} = F_{\omega_1\omega}(A_{L^F_{\omega\omega}})$.

Lisäksi sanotaan joukkoa $F^a = F_{L^F_{\omega\omega}} \cup F_{L^F(Q_0)} \cup F_{L_{SO}} \cup F_{L_{\omega_1\omega}}$ L^a-kaavojen joukoksi.

Olkoon $\phi(X)$ L_{SO}-kaava, jossa n-paikkainen relaatiomuuttuja X esiintyy vapaana. Olkoon $\psi(x_1, ..., x_n)$ $L_{\omega\omega}$-kaava, jossa esiintyy n vapaata muuttujaa. Kaavalla $\phi(\psi)$ tarkoitetaan tällöin kaavaa, joka saadaan korvaamalla relaatiomuuttujan X esiintymät kaavassa ϕ kaavalla ψ.

1.2. Malli, tulkinta ja totuus

L-malliksi sanotaan järjestettyä paria $\mathcal{M} = \langle M, g \rangle$ missä M on epätyhjä joukko, jota kutsutaan L-mallin $\mathcal{M}$ universumiksi $dom(\mathcal{M})$ sekä g on määritelty koko kielessä L siten, että $g(c) \in M$, kun c on vakiosymboli, $g(R) \subseteq M^n$, kun R on n-paikkainen relaatiosymboli ja $g(f)$ on funktio joukolta M^n joukolle M, kun f on n-paikkainen funktiosymboli. Kielen L symbolien tulkinnoista käytetään myös seuraavia merkintöjä: merkinnän $g(c)$ asemesta kirjoitetaan $c^{\mathcal{M}}$, merkinnän $g(R)$ asemesta $R^{\mathcal{M}}$ sekä merkinnän $g(f)$ asemesta $f^{\mathcal{M}}$.

Olkoot $L' \subseteq L$ aakkostoja ja $\mathcal{M}$ L-malli. Mallin $\mathcal{M}$ *rajoittuma* aakkostoon L' on se yksikäsitteinen L'-malli $\mathcal{M}'$, jolle $dom(\mathcal{M}') = \mathcal{M}$ sekä $s^{\mathcal{M}'} = s^{\mathcal{M}}$ kaikille relaatio-, funktio- ja vakiosymboleille $s \in L'$.

Lukuteorian aakkosto $L^{\mathbb{N}}$ on joukko $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \oplus, \otimes\}$. Luonnollisten lukujen struktuuriksi sanotaan $L^{\mathbb{N}}$-mallia $\mathcal{M}$, missä $dom(\mathcal{M}) = \mathbb{N}$ ja $\mathbf{0}^{\mathcal{M}} = 0$, $\mathbf{1}^{\mathcal{M}} = 1$, $\oplus^{\mathcal{M}} = +$ ja $\otimes^{\mathcal{M}} = \cdot$. Tästä mallista käytetään merkintää $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Luonnollisista luvuista käytetään mm. merkintöjä $0, 1, n, m$. Lukujen nimet ilmaistaan vahvennetuilla merkeillä siten, että $\mathbf{n}^{\mathcal{M}} = n$.

Ensimmäisen kertaluvun muuttujien tulkitsemiseksi mallissa $\mathcal{M}$ tarvitaan tulkintajonoa $s : \mathbb{N} \to M$, joka tulkitsee muuttujasymbolit v_n mallin universumin alkioiksi. Lisäksi kvanttorien totuusmääritelmissä tarvitaan modifioitua tulkintajonoa $s(n/a)$:

$$s(n/a)(i) = \begin{cases} s(i), & \text{jos } i \neq n; \\ a \in M, & \text{jos } i = n. \end{cases}$$

Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli. Laajennetaan aakkosto L aakkostoksi L_M lisäämällä uudet vakiosymbolit $\underline{m}$ kaikille $m \in M$.

L_M-termin t arvo L tulkintajonolla s, $t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$ määritellään seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{ll} c^{\mathcal{M}}\langle s \rangle & = c^{\mathcal{M}} \\ \underline{m}^{\mathcal{M}}\langle s \rangle & = m \\ v_n^{\mathcal{M}}\langle s \rangle & = s(n) \\ f(t_1, ..., t_n)^{\mathcal{M}}\langle s \rangle & = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s \rangle, ..., t_n^{\mathcal{M}}\langle s \rangle). \end{array}$$

Toisen kertaluvun muuttujien tulkitsemiseksi tarvitaan tulkintafunktiota S, joka kuvaa mielivaltaisen lukuparin $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ joukon M^m osajoukoksi. Tulkintafunktio $S(n/A)$ määritellään seuraavasti:

$$S(n/A)(i, j) = \begin{cases} S(i, j), & \text{jos } j \neq n; \\ A \subseteq M^i, & \text{jos } j = n. \end{cases}$$

Olkoon $\mathcal{M}$ mielivaltainen L-malli ja ϕ mielivaltainen L_M^a-malli. Kaava ϕ *toteutuu* mallissa $\mathcal{M}$ tulkintajonolla s ja tulkintafunktiolla S

$$\mathcal{M} \models \phi\langle s, S \rangle$$

jos ja vain jos:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(i)} & \mathcal{M} \models (t = t')\langle s, S\rangle & \iff & t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \\
\text{(ii)} & \mathcal{M} \models R(t_1, ..., t_n)\langle s, S\rangle & \iff & (t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, ..., t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \in R^{\mathcal{M}} \\
\text{(iii)} & \mathcal{M} \models (\neg\phi)\langle s, S\rangle & \iff & \mathcal{M} \not\models \phi\langle s, S\rangle \\
\text{(iv)} & \mathcal{M} \models (\phi \wedge \psi)\langle s, S\rangle & \iff & \mathcal{M} \models \phi\langle s, S\rangle \text{ ja } \mathcal{M} \models \psi\langle s, S\rangle \\
\text{(v)} & \mathcal{M} \models (\exists v_n \phi)\langle s, S\rangle & \iff & \mathcal{M} \models \phi\langle s(n/a), S\rangle \\
 & & & \quad \text{jollakin } a \in M \\
\text{(vi)} & \mathcal{M} \models (Q_0 v_n \phi)\langle s, S\rangle & \iff & \mathcal{M} \models \phi\langle s(n/a), S\rangle \\
 & & & \quad \text{äärettömän monella } a \in M \\
\text{(vii)} & \mathcal{M} \models V_n^m(t_1, ..., t_n)\langle s, S\rangle & \iff & (t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, ..., t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \in S(m, n) \\
\text{(viii)} & \mathcal{M} \models (\exists V_n^m \phi)\langle s, S\rangle & \iff & \mathcal{M} \models \phi\langle s, S(n/A)\rangle \\
 & & & \quad \text{jollakin } A \subseteq M^m \\
\text{(ix)} & \mathcal{M} \models (\bigwedge A)\langle s, S\rangle & \iff & \mathcal{M} \models \phi\langle s, S\rangle \\
 & & & \quad \text{kaikilla } \phi \in A.
\end{array}
$$

Totuusmääritelmästä havaitaan helposti, että kaavojen totuus ja epätotuus mallissa riippuu ainoastaan kaavassa esiintyvien symbolien tulkinnoista, ja että totuus ja epätotuus säilyvät kielen laajennuksissa. Luvussa 1.3 osoitetaan, että tätä ominaisuutta ei ole *ED*- ja *EDP*-totuusmääritelmillä. Mikäli kaavassa ϕ ei esiinny vapaana toisen kertaluvun muuttujia, niin käytetään merkintää $\mathcal{M} \models \phi\langle s\rangle$ kömpelön ilmaisun $\mathcal{M} \models \phi\langle s, S\rangle$ kaikilla S asemesta.

Lemma 1.2.1 Olkoon L aakkosto, ϕ L^a-kaava ja $\mathcal{M}$ L-malli. Olkoon L_ϕ kaavassa ϕ esiintyvien relaatio-, funktio- ja vakiosymbolien joukko ja $\mathcal{M}_\phi$ mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma aakkostoon L_ϕ. Tällöin $\mathcal{M} \models \phi$ jos ja vain jos $\mathcal{M}_\phi \models \phi$.

Todistus. Totuusmääritelmästä nähdään välittömästi, että väite pätee L_{SO}-atomikaavoille. Induktioaskeleet, joissa käydään läpi kaavat, jotka ovat muotoa $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\exists v_n \phi$, $Q_0 v_n \phi$, $\exists V_n^m \phi$ ja $\bigwedge A$ ovat triviaaleja. $\dashv$

Vapaiden toisen kertaluvun muuttujien salliminen kaavoissa, ei muuta logiikkojen ilmaisuvoimaa tavallisen totuusmääritelmän mielessä, minkä seuraava lemma ilmaisee. Tämän takia usein toisen kertaluvun muuttujat samaistetaan relaatiosymbolien kanssa. Erottelu yksinkertaistaa merkintöjä joissakin tapauksissa ja lisäksi vapaiden toisen kertaluvun muuttujien käyttäytyminen poikkeaa relaatiosymbolien käyttäytymisestä *ED*- ja *EDP*-totuusmääritelmien mielessä, koska määritelmissä ei saa esiintyä vapaita toisen kertaluvun muuttujia (mutta kylläkin relaatiosymboleja).

Määritellään aakkoston L *ϕ-laajennus* L^{ϕ} seuraavasti: Olkoon A seuraava joukko: $\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 | V_m^n$ esiintyy vapaana kaavassa $\phi\}$. Olkoon R_m^n uusia relaatiosymboleita, joiden paikkaluku on n, ja jotka eivät esiinny aakkostossa L. Asetetaan nyt $L^{\phi} = L \cup \{R_m^n | (n,m) \in A\}$. Seuraavaksi määritellään L-mallin $\mathcal{M}$ *(ϕ,S)-laajennus* $\mathcal{M}^{(\phi,S)}$. $\mathcal{M}^{(\phi,S)}$ on se yksikäsitteinen L^{ϕ}- malli, jonka rajoittuma aakkostoon L on $\mathcal{M}$ ja $R^n\mathcal{M}^{(\phi,S)}{}_m = S(n,m)$, kun $(n,m) \in A$.

Lemma 1.2.2 Olkoon L aakkosto, $\phi \in F^F_{L_{\omega\omega}} \cup F^S_{L_{\omega_1\omega}} \cup F^S_{L(Q(0))}$, s tulkintajono, S tulkintafunktio ja ϕ' L^{ϕ}-kaava, joka on saatu korvaamalla relaatiomuuttujat V_m^n aakkoston L^{ϕ} relaatiosymboleilla R_m^n. Tällöin $\mathcal{M} \models \phi\langle s,S\rangle$ jos ja vain jos $\mathcal{M}^{(\phi,S)} \models \phi'\langle s,S\rangle$.

Todistus. Suoraan totuusmääritelmän kohdista (ii) ja (vii). $\dashv$

L-lausetta ϕ sanotaan *validiksi* jos ja vain jos se on tosi kaikissa L-malleissa $\mathcal{M}$. Jos $\phi(x_0,...,x_n,X_0,...,X_m)$ on L-kaava, jonka ainoat vapaat muuttujat ovat $x_0,...,x_n$ ja $X_0,...,X_m$, niin kaavan ϕ *universaaliksi sulkeumaksi* kutsutaan L-lausetta $\forall x_0...\forall x_n \forall X_0...\forall X_m \phi$. L-kaava on validi jos ja vain jos sen universaalinen sulkeuma on validi.

1.3. Elementaarinen määriteltävyys

Olkoon $\phi(v_0,...,v_n)$ $L_{\omega\omega}$-kaava, $\mathcal{M}$ L-malli. Oletetaan, että kaavassa ϕ on täsmälleen n vapaata muuttujaa. Otetaan käyttöön seuraava merkintä:

$$\phi^{\mathcal{M}} = \{(a_0,...,a_n) \in M^{n+1} | \mathcal{M} \models \phi(\underline{a_0},...,\underline{a_n})\}.$$

Relaatio R on *elementaarisesti määriteltävissä* mallissa $\mathcal{M}$, mikäli on olemassa elementaarinen kaava ϕ siten, että $R = \phi^{\mathcal{M}}$. Relaatio R on *elementaarisesti määriteltävissä parametrein* mallissa $\mathcal{M}$, mikäli on olemassa $k+n$-paikkainen relaatio S, joka on elementaarisesti määriteltävissä mallissa $\mathcal{M}$ ja R=$\{(a_0,...,a_{k-1}) \in M^k | (a_0,...,a_{k+n-1}) \in S\}$.

Nyt voidaan määritellä käsitteet *ED*-tosi, *EDP*-tosi, (*ED*, L)-validi ja (*EDP*, L)-validi. *ED* ja *EDP* ovat toisen kertaluvun logiikan modifikaatioita: Niillä on sama syntaksi kuin toisen kertaluvun logiikalla, mutta eri semantiikka. *ED*-totuusmääritelmä L_{SO}-kaavoille on muuten samanlainen kuin totuusmääritelmä, mutta kohdan (vii) ekvivalenssin oikeanpuoleinen osa korvataan ehdolla:

> $\mathcal{M} \models_{ED} \phi\langle s, S(n/A)\rangle$ jollakin $A \subseteq M^m$, joka on elementaarisesti määriteltävissä mallissa $\mathcal{M}$.

EDP-totuusmääritelmä saadaan vastaavalla tavalla:

> $\mathcal{M} \models_{EDP} \phi\langle s, S(n/A)\rangle$ jollakin $A \subseteq M^m$, joka on elementaarisesti määriteltävissä parametrein mallissa $\mathcal{M}$.

Luvussa 4 tarvitaan lauseissa samanaikaisesti tavallisella tavalla ja joko logiikan *ED* tai *EDP* mielessä tulkittuja kvanttoreita. Tällöin käytetään tällaisesta normaalisti tulkitusta kvanttorista merkintää ja $\exists^S$ ($\forall^S$) ja se tulkitaan kuten eksistenssikvanttori tavallisessa totuusmääritelmässä.

L_{SO}-lause ϕ on (ED, L)-validi, jos ja vain jos se on *ED*-tosi kaikissa L-malleissa. (ED, L)-validisuus kaavoille määritellään kuten validisuuskin.
(EDP, L)-validisuus määritellään kuten (ED, L)-validisuus.

Lause 1.3.1 Jos $\phi(X)$ on $L^F_{\omega\omega}$-kaava, jonka ainoa vapaa muuttuja on X ja $\mathcal{M} \models_{ED} \exists X\phi(X)$, niin $\mathcal{M} \models_{EDP} \exists X\phi(X)$.

Todistus. Seuraa suoraan määritelmästä.$\dashv$

Ylläannetussa määritelmässä on olennaista se, että validisuus on rajoitettu annettuun kieleen L. Seuraavassa annettaan esimerkki tilanteesta, jossa L_{SO}-lause on (EDP, L)-validi, mutta ei $(ED, L \cup \{P\})$-validi, missä P on yksipaikkainen predikaattisymboli.

Olkoon $L = \{<\}$. Diskreettien lineaarijärjestysten teoria voidaan nyt aksiomatisoida kielessä L esimerkiksi seuraavalla tavalla:

DIS_1	$\forall x \neg(x < x)$
DIS_2	$\forall x \forall y(x < y \to \neg(y < x))$
DIS_3	$\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \to x < z)$
DIS_4	$\forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$
DIS_5	$\exists x \forall y(x < y \vee x = y)$
DIS_6	$\forall x \exists y(x < y \wedge \forall z(x < z \wedge z < y))$
DIS_7	$\forall x(\exists y(y < x) \to \exists y(y < x \wedge \forall z(y < z \wedge z < x)))$

Olkoon ϕ_{DIS} edellisten kaavojen disjunktio. Malliteorian kurssilla on todistettu, että $\{\phi_{DIS}\}$ on täydellinen elementaarinen teoria. Määritellään kaava $\theta(X)$ seuraavasti:

$$\theta(X) = \forall x \forall y((x < y = \wedge \forall z((z = x) \vee (z = y) \vee (z < x) = \vee (y < z)) \rightarrow (X(x) \leftrightarrow \neg X(y))).$$

Kaava 'sanoo', että $x^{\mathcal{M}}$ kuuluu joukkoon $X^{\mathcal{M}}$ jos ja vain jos sen seuraaja ei kuulu siihen.

Lemma 1.3.2 *Olkoon $\mathcal{M}$ sellainen $\{<\}$-malli, että $\mathcal{M} \models \phi_{DIS}$. Tällöin mikään $X \subseteq M$, joka toteuttaa kaavan $\theta(X)$ mallissa $\mathcal{M}$ ei ole elementaarisesti määriteltävissä parametrein mallissa $\mathcal{M}$.*

Todistus. Oletetaan, että on. Olkoon $\mathcal{M}$ mielivaltainen $\{<\}$-malli, jossa X olisi määriteltävissä parametrein. Olkoon $\phi(x, y_1, ..., y_n)$ kaava, joka määrittelee joukon X parametreilla $a_1, ..., a_n \in M$ mallissa $\mathcal{M}$.

Jos malli $\mathcal{M} \cong \langle \mathbb{N}, < \rangle$, valitaan Löwenheim-Skolemin lauseen perusteella mallille $\mathcal{M}$ ylinumeroituva elementaarinen laajennus $\mathcal{N}$, muutoin asetetaan $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Nyt $\mathcal{N} \ncong \langle \mathbb{N}, < \rangle$. Nyt siis $\mathcal{N}$ koostuu mallin $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ kanssa isomorfisesta alkusegmentistä, jota seuraa vähintään yksi mallin $\langle \mathbf{Z}, < \rangle$ kanssa isomorfinen segmentti. Käytetään tämän mallin ensimmäisen tälläisen segmentin alkioista merkintää $b_z, z \in \mathbf{Z}$ ja segmentistä merkintää B.

Nyt voimme määritellä seuraavanlaisen automorfismin $f : M \mapsto M$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \notin B; \\ b_{z+1}, & \text{jos } x \in B \text{ ja } x = b_z. \end{cases}$$

Nyt siis jos $\mathcal{M} \models \phi(\underline{b_z}, \underline{a_1}, ..., \underline{a_n})$ jollakin $z \in \mathbf{Z}$, niin $\mathcal{M} \models \phi(\underline{b_{z+1}}, \underline{a_1}, ..., \underline{a_n})$ edellä konstruoidun automorfismin nojalla, mikä on ristiriidassa kaavan $\theta(X)$ kanssa. $\dashv$

On helppoa antaa esimerkki lauseen ϕ_{DIS} $\{<, P\}$-mallista, missä P on yksipaikkainen relaatiosymboli, jossa X on elementaarisesti määriteltävissä, vaikka se toteuttaa kaavan $\theta(X)$. Olkoon $dom(\mathcal{M}) = \mathbb{N}$ ja $<$ luonnollisten lukujen tavallinen järjestys. Olkoon $P^{\mathcal{M}}$ parillisten luonnollisten lukujen joukko. Nyt kaava $P(x)$ määrittelee sellaisen joukon X, joka toteuttaa kaavan $\theta(X)$

mallissa $\mathcal{M}$.

Edellisistä esimerkeistä seuraa, että vapaat relaatiomuuttujat käyttäytyvät eri tavalla kuin relaatiosymbolit *ED*- ja *EDP*- totuusmääritelmien mielessä. Nimittäin $\exists X \forall x(P(x) \leftrightarrow X(x))$ on sekä (ED, L)- että (EDP, L)-validi kaikilla $L \ni P$, mutta toisaalta pätee

$$\langle \mathbb{N}, < \rangle \not\models_{ED(P)} \exists X \forall x(X(x) \leftrightarrow V_0^1(x))\langle s, S\rangle,$$

kaikilla S, joilla $S(0,1)$ on parillisten luonnollisten lukujen joukko.

1.4. Logiikoiden *ED* ja *EDP* upotus logiikkaan $L_{\omega_1\omega}$

Luvussa 4 osoitetaan, että logiikoilla *ED* ja *EDP* ei ole efektiivistä aksiomatisointia. Kyseisessä todistuksessa tarvitaan Löwenheim-Skolemin lauseen heikkoa muotoa (Lause 1.4.4). Tässä jaksossa lause todistetaan siten, että osoitetaan, että sekä *ED* että *EDP* voidaan upottaa äärettömään kieleen $L_{\omega_1\omega}$, minkä jälkeen todistetaan lause 1.4.4. samaan tapaan kuin alaspäinen Löwenheim-Skolemin lause ensimmäisen kertaluvun logiikalle malliteorian luentomonisteessa [6] sivuilla 35-37.

Lause 1.4.1 *Jokaista L-kaavaa ϕ, jonka vapaat relaatiomuuttujat ovat $X_1, ..., X_n$, kohti on olemassa $L^F_{\omega_1\omega}$-kaava ψ, jossa samat muuttujat esiintyvät vapaana, siten, että $\mathcal{M} \models_{ED} \phi\langle s, S\rangle$ ($\mathcal{M} \models_{EDP} \forall^S X_1 ... \forall^S X_n \phi$) jos ja vain jos $\mathcal{M} \models \forall^S X_1 ... \forall^S X_n \psi$, kun $\mathcal{M}$ on mielivaltainen L-malli, s mielivaltainen tulkintajono ja S mielivaltainen tulkintafunktio.*

Todistus. Rakennetaan kaava ψ induktion avulla. Jos kaava ϕ ei sisällä toisen kertaluvun kvanttoreita, on väite triviaali. Myös induktioaskeleet $\neg\psi$ ja $\psi \wedge \theta$ ovat triviaaleja. Oletetaan sitten, että ϕ on muotoa $\exists X_1 \theta(X_1, ..., X_n)$, ja että on olemassa $L^F_{\omega_1\omega}$-kaava $\eta(X_1, ..., X_n)$ siten, että induktio-oletus pätee.

Olkoon muuttujan X_1 paikkaluku m. Logiikan *ED* tapauksessa voidaan valita kaavaksi ψ kaava

$$\bigvee \{\theta(\delta(v_0, ..., v_{m-1}) | \delta \text{ elementaarinen } L\text{-kaava, jossa esiintyy täsmälleen muuttujat } v_0, ..., v_{m-1} \text{ vapaana}\}.$$

Logiikan *EDP* tapauksessa kaavaksi ψ valitaan kaava

$$\bigvee\{\exists v_m ... \exists y_{m+k-1}\theta(\delta) | \delta \text{ elementaarinen } L\text{-kaava, jossa esiintyy täsmälleen muutujat } v_0, ..., v_{m+k-1} \text{ vapaana, missä } k \in \mathbb{N}.\}. \dashv$$

Olkoon L mielivaltainen. Laajennetaan aakkosto L aakkostoksi L^* seuraavasti:

(1) lisätään jokaista $L_{\omega_1\omega}$-kaavaa $\phi(x)$ kohti uusi vakiosymboli c_ϕ.
(2) lisätään jokaista $L_{\omega_1\omega}$-kaavaa $\psi(x_1, ..., x_{n+1})$ kohti n-paikkainen funktiosymboli f_ψ.

Määrittellään aakkoston L *skolemisointi* L^{Sk} seuraavasti: $L^0 = L$ ja $L^{n+1} = (L^n)^*$, kun $n \in \mathbb{N}$. $L^{Sk} = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$.

Olkoon T numeroituva joukko $L_{\omega_1\omega}$-lauseita. Määritellään teoriat T^n induktiolla seuraavasti. Asetetaan $T^0 = T$. Teoria T^{n+1} saadaan lisäämällä jokaista teorian T^n kaavan alikaavaa $\phi(x)$ ja $\psi(x_1, ..., x_n)$ kohti seuraavat Skolem-aksioomat:

(1) $\exists x \phi(x) \rightarrow \phi(c_\phi)$
(2) $\forall x_1 ... \forall x_n(\exists x_{n+1}\psi(x_1, ..., x_{n+1}) \rightarrow \psi(x_1, ..., x_n, f_\psi(x_1, ..., x_n)))$

Teorian T skolemisointi, T^{Sk} on teoria $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n$.

Lemma 1.4.2 *Olkoon T numeroituva $L_{\omega_1\omega}$-teoria ja T^{Sk} sen skolemisointi. Jokaista teorian T^{Sk} kaavaa ϕ kohti on olemassa kvanttoriton kaava ϕ^*, jossa on yhtä monta vapaata muuttujaa kuin kaavassa ϕ ja väite*

$$T^S \models \forall x_1 ... \forall x_n(\phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \phi^*(x_1, ..., x_n))$$

pätee.

Todistus. Käytetään induktiota kaavan ϕ pituuden suhteen. Jos ϕ on $L^{Sk}_{\omega_1\omega}$-atomikaava, niin väite pätee. Väite pätee myös selvästi, kun ϕ on muotoa $\neg\psi$ ja väite pätee kaavalle ψ.

Oletetaan seuraavaksi, että väite pätee kaavoille ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$ ja että ϕ on muotoa $\bigwedge_{n=0}^{\infty} \phi_n$. Nyt on siis voimassa $T^{Sk} \models \phi_n \leftrightarrow \phi_n^*$ kaikille n, joten seuraava on voimassa:

$$T^{Sk} \models \bigwedge_{n=0}^{\infty} \phi_n \leftrightarrow \bigwedge_{n=0}^{\infty} \phi_n^*.$$

Oletetaan lopuksi, että $\phi(x_1, ..., x_n) = \exists x_{n+1}\psi(x_1, ..., x_{n+1})$. Induktio-oletuksen nojalla on olemassa kvanttoriton kaava ψ^*, jolla $T^{Sk} \models \psi \leftrightarrow \psi^*$. Kaava ψ on kaavan ϕ alikaava ja ϕ on L^n-kaava jollakin $n \in \mathbb{N}$. Oletetaan ensin, että kaavassa ψ on täsmälleen yksi vapaa muuttuja. On siis olemassa $c_\psi \in L^{n+1} \subseteq L^{Sk}$. Nyt pätee

$$T^{Sk} \models \exists x\psi(x) \leftrightarrow \psi(c_\psi),$$

mistä saadaan välittömästi

$$T^{Sk} \models \phi \leftrightarrow \psi^*(c_\psi).$$

Oletetaan sitten, että kaavassa ψ on useampia vapaita muuttujia. On siis olemassa $f_\psi \in L^{n+1} \subseteq L^S$. Nyt taas pätee:

$$T^{Sk} \models \exists x_{n+1}\psi(x_1, ..., x_{n+1}) \leftrightarrow \psi(x_1, ..., x_n, f_\psi(x_1, ..., x_n)),$$

mistä seuraa, että

$$T^{Sk} \models \phi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \psi^*(x_1, ..., x_n, f_\psi(x_1, ..., x_n))).$$

$\dashv$

Jos $\mathcal{A}$ on L-malli, niin mallin $\mathcal{A}$ Skolem-laajennus on sellainen L^{Sk}-malli $\mathcal{A}^{Sk}$, että $\mathcal{A}^{Sk}$ toteuttaa Skolem-aksioomat ja mallin $\mathcal{A}^{Sk}$ rajoittuma aakkostoon L on $\mathcal{A}$.

Lemma 1.4.3 *Jokaisella L-mallilla $\mathcal{A}$ on Skolem-laajennus $\mathcal{A}^{Sk}$*

Todistus. Konstruoidaan malli $\mathcal{A}^{Sk}$ seuraavasti. Olkoon $<$ joukon A hyvinjärjestys ja a^* joukon A $<$-pienin alkio. Määritellään L^n-mallit $\mathcal{A}^n$ induktiolla luvun $n \in \mathbb{N}$ suhteen: (i) Asetetaan $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}$. (ii) Oletetaan, että $\mathcal{A}^n$ on määritelty. Tulkitaan ensin aakkoston L^n alkiot seuraavasti: mallin $\mathcal{A}^{n+1}$ rajoittuma aakkostoon L^n on $\mathcal{A}^n$. Olkoon sitten $c_\phi \in L^{n+1} - L^n$, joka esiintyy teoriassa T^{Sk}. Mikäli joukko $\{a \in A | \mathcal{A} \models \phi(\underline{a})\}$ ei ole tyhjä, valitaan tästä joukosta $<$-pienin alkio a, ja asetetaan $c^{\mathcal{A}^{n+1}} = a$. Muussa tapauksessa asetetaan $c_\phi^{\mathcal{A}^{n+1}} = a^*$.

Vastaavasti jos $f_\phi \in L^{n+1} - L^n$ ja $a_1, ..., a_n \in A$, tarkastellaan joukkoa $B = \{a \in A | \mathcal{A} \models \phi(\underline{a_1}, ..., \underline{a_n}, \underline{a})\}$. Jos B ei ole tyhjä, asetetaan $f_\phi^{\mathcal{A}^{n+1}} = a$, missä

a on joukon B $<$-pienin alkio. Muussa tapauksessa asetetaan $f_\phi^{\mathcal{A}^{n+1}} = a^*$.

Olkoon lopuksi $\mathcal{A}^{Sk}$ se yksikäsitteinen L^{Sk}-malli, jolla mallin $\mathcal{A}^{Sk}$ rajoittuma kieleen L^n on $\mathcal{A}^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.$\dashv$

Lause 1.4.4 Jos $\mathcal{M} \models_{ED(P)} T$, missä T on numeroituva joukko L-lauseita ja $\mathcal{M}$ mielivaltainen L-malli, niin on olemassa numeroituva L-malli $\mathcal{N}$ siten, että $\mathcal{N} \models_{ED(P)} T$.

Todistus. Olkoon T numeroituva $L_{\omega_1\omega}$-teoria ja $\mathcal{M} \models T$. Olkoon $\mathcal{M}^{Sk}$ mallin $\mathcal{M}$ jokin Skolem-laajennus. Nyt teorialle T voidaan konstruoida numeroituva malli $\mathcal{N}$: Otetaan kaikki teoriassa T^{Sk} esiintyvien vakiosymbolien tulkintojen joukko $A \subseteq M$ ja muodostetaan joukon A sulkeuma kaikkien mallissa $\mathcal{M}^{Sk}$ esiintyvien funktiosymbolien tulkintojen suhteen. Selvästi N on numeroituva. Asetetaan $dom(\mathcal{N}^S) = N$, $f^{\mathcal{N}^S} = f^{\mathcal{M}^{Sk}} \cap N^{n+1}$ ja $R^{\mathcal{N}^S} = R^{\mathcal{M}^S} \cap N^n$, missä $f \in L^S$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $R \in L^S$ n-paikkainen relaatiosymboli. Olkoon malli $\mathcal{N}$ mallin $\mathcal{N}^S$ rajoittuma aakkostoon L.

Väitetään nyt, että $\mathcal{N} \models T$. Osoitetaan ensin, että $\mathcal{N}^S$ on teorian T^S malli. Olkoon ϕ mielivaltainen teorian T^S lause. On siis olemassa kvanttoriton ϕ^* siten, että $T^S \models \phi \leftrightarrow \phi^*$. Oletetaan ensin, että ϕ^* on $L^S_{\omega_1\omega}$-atomilause. Siis ϕ^* on muotoa $R(t_1, ..., t_n)$, missä $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_1, ..., t_n$ ovat L^S-vakiotermejä. Nyt $\mathcal{M}^S \models \phi^*$ ja siis $\mathcal{N}^S \models \phi^*$, koska $t^{\mathcal{M}^S} = t^{\mathcal{N}^S}$ kaikilla L^S-vakiotermeillä t. Oletetaan kääntäen, että ϕ^* toteutuu mallissa $\mathcal{N}^S$. Samalla päättelyllä nähdään, että ϕ^* toteutuu myös mallissa $\mathcal{M}^S$.

Oletetaan seuraavaksi, että ϕ^* on muotoa $\neg\psi$ ja että kaavalle ψ pätee: $\mathcal{M}^S \models \psi$ jos ja vain jos $\mathcal{N}^S \models \psi$. Nyt selvästi: $\mathcal{M}^S \models \phi^*$ jos ja vain jos $\mathcal{N}^S \models \phi^*$.

Oletetaan lopulta, että ϕ^* on muotoa $\wedge_{n=0}^{\infty}\phi_n$ ja että kaavoille ϕ_n pätee: $\mathcal{M}^S \models \phi_n$ jos ja vain jos $\mathcal{N}^S \models \phi_n$. Jälleen selvästi $\mathcal{M}^S \models \phi^*$ jos ja vain jos $\mathcal{N}^S \models \phi^*$.

Koska $\mathcal{N}^S$ on teorian T^S malli, on $\mathcal{N}$ teorian T malli. $\dashv$

2. Robinsonin lukuteoria Q

Robinsonin lukuteoria Q on merkittävä sen vuoksi, että se on lukuteorian äärellinen aksiomatisointi, jossa kaikki rekursiiviset relaatiot ovat esitettävissä.

2.1. Teorian Q aksioomat

Robinsonin lukuteoria on $L^{\mathbb{N}}$-teoria, joka koostuu seuraavista seitsemästä aksioomasta Q_n, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

(Q_0) $\forall x(\neg(x \oplus \mathbf{1} = \mathbf{0}))$
(Q_1) $\forall x \forall y(x \oplus \mathbf{1} = y \oplus \mathbf{1} \to x = y)$
(Q_2) $\forall x(x \oplus \mathbf{0} = x)$
(Q_3) $\forall x \forall y(x \oplus (y \oplus \mathbf{1}) = (x \oplus y) \oplus \mathbf{1})$
(Q_4) $\forall x(x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0})$
(Q_5) $\forall x \forall y(x \otimes (y \oplus \mathbf{1}) = (x \otimes y) \oplus x)$
(Q_6) $\forall x(\neg(x = \mathbf{0}) \to \exists y(y \oplus \mathbf{1} = x))$

Koska teoria Q on äärellinen, voidaan puhua myös lauseesta Q, jolla tarkoitetaan lausetta: $\wedge_{i=0}^{6} Q_i$. Välittömästi nähdään, että Q on lukuteorian aksiomatisointi, ts. $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models Q$.

2.2. Rekursiiviset relaatiot ja funktiot

Olkoon $R(y, x_1, ..., x_n)$ relaatio ja $f(x_1, ..., x_n)$ funktio. Sanomme, että f on saatu relaatiosta R *minimalisaatiolla*, jos ja vain jos kaikilla $x_1, ..., x_n$.

(1) on olemassa y siten, että $R(y, x_1, ..., x_n)$ ja
(2) $f(x_1, ..., x_n) =$ pienin y siten, että $R(y, x_1, ..., x_n)$

Funktio f on *rekursiivinen*, mikäli se kuuluu pienimpään joukkoon funktioita, joka sisältää funktiot

$Pr_i^n(x_1, ..., x_n) = x_i$	(projektiofunktio)
$x + y = z$	(yhteenlasku)
$x \cdot y = z$	(kertolasku)
$f_=(x, y) = z$	(identiteettirelaation karakteristinen funktio)

ja on suljettu sekä funktioiden yhdistämisen että minimalisaation suhteen. Relaation rekursiivisuudella tarkoitetaan seuraavaa. Jos ehdot

(i) $R(x_1, ..., x_n) \Longleftrightarrow f(x_1, ..., x_n) = 1$ ja
(ii) $\sim R(x_1, ..., x_n) \Longleftrightarrow f(x_1, ..., x_n) = 0$

ovat voimassa, niin relaatio R on rekursiivinen jos ja vain jos funktio f on rekursiivinen.

2.3. Esitettävyys teoriassa Q

Matemaattisen logiikan kurssilla ([7], s.60-63) on todistettu, että jokainen rekursiivinen funktio on määriteltävissä $L_{\omega\omega}$-kaavalla mallissa $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Tätä havaintoa käytetään hyväksi luvussa 4, kun todistetaan, että logiikoilla ED ja EDP ei ole korrektia ja täydellistä päättelysääntöjärjestelmää. Tässä luvussa todistetaan toisenlainen rekursiivisia relaatioita ja funktioita koskeva väite, joka koskee teorian Q sekä rekursiivisten relaatioiden ja funktioiden välistä suhdetta.

Kaavan $\phi(x_1, ..., x_n)$ sanotaan *esittävän* relaatiota R teoriassa Q, mikäli

(i) $(m_1, ..., m_n) \in R \Longleftrightarrow Q \vdash \phi(\mathbf{m_1}, ..., \mathbf{m_n})$ ja
(ii) $(m_1, ..., m_n) \notin R \Longleftrightarrow Q \vdash \neg\phi(\mathbf{m_1}, ..., \mathbf{m_n})$.

Kaava $\phi(x_1, ..., x_{n+1})$ esittää funktiota f teoriassa Q, mikäli pätee

$$Q \vdash \forall x_{n+1}(\phi(\mathbf{m_1}, ..., \mathbf{m_n}, x_{n+1}) \leftrightarrow x_{n+1} = \mathbf{m_{n+1}}),$$

aina kun $f(m_1, ..., m_n) = m_{n+1}$.

Tämän luvun päätulos on lause 2.3.13, joka 'sanoo', että kaikki rekursiiviset relaatiot ja funktiot ovat esitettävissä teoriassa Q. Tätä tulosta tarvitaan luvussa 3, kun todistetaan, että logiikoissa ED ja EDP voidaan karakterisoida malli $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ isomorfiaa vaille yksikäsitteisesti.

Lemma 2.3.1 *Kaava $v_0 = v_0 \wedge ... \wedge v_n = v_n \wedge v_{n+1} = v_i$ esittää projektiota Pr_i^n teoriassa Q.*

Todistus. Kaavat $\forall x_{m+1}((\mathbf{j_1} = \mathbf{j_1} \wedge ... \wedge \mathbf{j_n} = \mathbf{j_n} \wedge x_{n+1} = \mathbf{j_i}) \leftrightarrow x_{n+1} = \mathbf{j_i})$

ovat valideja kaikilla $j_1, .., j_n$.$\dashv$

Lemma 2.3.2 *Kaava $v_0 \oplus v_1 = v_2$ esittää yhteenlaskua teoriassa Q.*

Todistus. Oletetaan, että $i + j = k$. Todistetaan ensin induktiolla, että $Q \vdash \mathbf{i} \oplus \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Olkoon $j = 0$. Aksiooman Q_2 perusteella $Q \vdash \mathbf{i} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{i}$. Olkoon sitten $j = m + 1$. Nyt oletetaan, että $Q \vdash \mathbf{i} \oplus \mathbf{m} = \mathbf{n}$ ja jollekin n pätee $k = n + 1$ ja $i + m = n$. Tästä seuraa, että $Q \vdash (\mathbf{i} \oplus \mathbf{j}) \oplus \mathbf{1} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{1}$, mistä seuraa aksiooman Q_5 nojalla $Q \vdash \mathbf{i} \oplus \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

Koska $\forall x_3(\mathbf{i} \oplus \mathbf{j} = x_3 \leftrightarrow x_3 = k)$ on kaavan $\mathbf{i} \oplus \mathbf{j} = \mathbf{k}$ looginen seuraus, saadaan haluttu tulos. $\dashv$

Lemma 2.3.3 *Kaava $v_0 = v_1 \otimes v_2$ esittää kertolaskua teoriassa Q.*

Todistus. Oletetaan, että $i \cdot j = k$. Todistetaan ensin induktiolla, että $Q \vdash \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Olkoon $j = 0$. Aksiooman Q_4 perusteella $Q \vdash \mathbf{i} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Olkoon sitten $j = m + 1$. Nyt oletetaan, että $Q \vdash \mathbf{i} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{n}$ ja jollekin n pätee $k = n + i$ ja $i \cdot m = n$. Lemman 2.3.2 perusteella nyt on voimassa $Q \vdash \mathbf{i} \oplus \mathbf{m} = \mathbf{n}$. Aksiooman Q_5 perusteella on saadaan nyt $Q \vdash \mathbf{i} \otimes (\mathbf{m} \oplus \mathbf{1}) = (\mathbf{i} \otimes \mathbf{m}) \oplus \mathbf{i}$. Siispä $Q \vdash \mathbf{i} \otimes (\mathbf{m} \oplus \mathbf{1}) = \mathbf{k}$, eli $Q \vdash \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = \mathbf{k}$, ja tästä edelleen $\forall x_3(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = x_3 \leftrightarrow x_3 = k)$.$\dashv$

Lemma 2.3.4 *Jos $i \neq j$, niin $Q \vdash \neg \mathbf{i} = \mathbf{j}$.*

Todistus. Todistetaan induktiolla. Voidaan ilman rajoitusta olettaa, että $i < j$. Mikäli $i = 0$, niin $j > 0$, ja sen takia jollekin n pätee $j = n + 1$. On siis todistettava $Q \vdash \neg \mathbf{0} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{1}$. Tämä seuraa suoraan aksioomasta Q_0. Olkoon sitten $i = m + 1$. Induktio-oletuksen nojalla $Q \vdash \neg \mathbf{m} = \mathbf{n}$ pätee. Aksiooman Q_1 nojalla pätee näin ollen $Q \vdash \neg \mathbf{m} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{1}$. $\dashv$

Lemma 2.3.5 *Jos kaava $(v_0 = v_1 \wedge v_2 = \mathbf{1}) \vee (\neg v_0 = v_1 \wedge v_2 = \mathbf{0})$ esittää identiteettirelaation karakteristista funktiota teoriassa Q.*

Todistus. Käytetään yllämainitustaa kaavasta merkintää $\phi_{EQ}(v_0, v_1, v_2)$. Jos $f_=(i, j) = 1$, niin $i = j$, joten $Q \vdash \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ja siis $Q \vdash \phi_{EQ}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{1})$ ja edelleen $Q \vdash \forall v_2(\phi(\mathbf{i}, \mathbf{j}, x_3) \leftrightarrow x_3 = \mathbf{1})$. Mikäli $f_=(i, j) = 0$, niin $i \neq j$. Nyt Lemman 2.3.4 perusteella $Q \vdash \neg \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Tästä saadaan $Q \vdash \neg \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, ja edelleen $Q \vdash \forall v_2(\phi(\mathbf{i}, \mathbf{j}, x_3) \leftrightarrow x_3 = \mathbf{0}).\dashv$

Lemma 2.3.6 *Jos kaava $\phi(x_1, ..., x_m, x)$ esittää funktiota f teoriassa Q ja kaavat $\psi_1(x_1, ..., x_{n+1}), ..., \psi_m(x_1, ..., x_{n+1})$ esittävät funktioita $g_1, ..., g_m$ teoriassa Q ja h on saatu yhdistämällä edellämainituista funktioista, niin kaava*

$$\theta(x_1, ..., x_n, x) = \exists y_1 ... \exists y_m(\psi_1(x_1, ..., x_n, y_1) \wedge ... \wedge \psi_m(x_1, ..., x_n, y_m) \\ \wedge \phi(y_1, ..., y_m, x))$$

esittää funktiota h teoriassa Q.

Todistus. Hajoitetaan todistus kahteen osaan. Kaava $\forall x(\theta(x_1, ..., x_n, x) \leftrightarrow x = \mathbf{c})$ on selvästi ekvivalentti kaavan $\theta(x_1, ..., x_n, \mathbf{c}) \wedge \forall x(\theta(x_1, ..., x_n, x) \rightarrow x = \mathbf{c})$ kanssa. Todistetaan ensin konjuntion vasen puoli.

Jos $g_i(t_1, ..., t_n) = k_i$, niin $Q \vdash \psi_i(\mathbf{t_1}, ..., \mathbf{t_n}, \mathbf{k_i})$, ja jos $f(k_1, ..., k_m) = j$, niin $Q \vdash \phi(\mathbf{k_1}, ..., \mathbf{k_m}, \mathbf{j})$. Näistä seuraa $Q \vdash \theta(\mathbf{t_1}, ..., \mathbf{t_n}, \mathbf{j})$ (*).

Samoin, jos $g_i(t_1, ..., t_n) = k_i$, niin $Q \vdash \forall x(\psi_i(\mathbf{t_1}, ..., \mathbf{t_n}, x) \rightarrow x = \mathbf{k_i})$ (**) ja jos $f(k_1, ..., k_m) = j$, niin $Q \vdash \forall x(\phi(\mathbf{k_1}, ..., \mathbf{k_m}, x) \rightarrow x = \mathbf{j})$ (***). Oletetaan nyt, että $\psi_i(\mathbf{t_1}, ..., \mathbf{t_n}, y_i)$ pätee, ja että $\phi(y_1, ..., y_m, x)$ on voimassa. Nyt lauseita (**) käyttämällä saadaan $y_i = \mathbf{k_i}$, joten $\phi(\mathbf{k_1}, ..., \mathbf{k_m}, x)$ on voimassa. Tästä saadaan lauseen (***) avulla $x = \mathbf{j}$. Siis on voimassa:

$$Q \vdash \forall x(\exists y_1 ... \exists y_m(\psi_1(x_1, ..., x_n, y_1) \wedge ... \wedge \psi_m(x_1, ..., x_n, y_m) \wedge \\ \phi(y_1, ..., y_m, x)) \rightarrow x = \mathbf{j}),$$

mistä saadaan $Q \vdash \forall x(\theta(x_1, ..., x_n, x) \leftarrow x = \mathbf{j})$. Kun tämä yhdistetään lauseen (*) kanssa, on lemman todistus valmis.$\dashv$

Seuraavissa lemmoissa $v_0 < v_1$ tarkoittaa kaavaa $\exists x_3((x_3 \oplus \mathbf{1}) \oplus x_1 = x_2)$.

Lemma 2.3.7 *Kaikille i, $Q \vdash \forall x((x \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{i} = x \oplus (\mathbf{i} \oplus \mathbf{1}))$.*

Todistus. Induktio muuttujan i suhteen. Olkoon $i = 0$. Aksioomista Q_2 ja Q_3 seuraa, että $\forall x((x \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{0} = x \oplus \mathbf{1} = (x \oplus \mathbf{0}) \oplus \mathbf{1} = x \oplus (\mathbf{0} \oplus \mathbf{1}))$. Tästä seuraa edelleen $Q \vdash \forall x((x \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{0} = x \oplus (\mathbf{0} \oplus \mathbf{1}))$. Jos $i = m + 1$, niin induktiohypoteesin nojalla $Q \vdash \forall x((x \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{m} = x + (\mathbf{m} \oplus \mathbf{1}))$. Aksioomasta Q_3 seuraa, että $Q \models \forall x((x \oplus \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{m} \oplus 1) = ((x \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{m}) \oplus \mathbf{1}) =$

$(x \oplus (\mathbf{m} \oplus \mathbf{1})) \oplus \mathbf{1} = x \oplus ((\mathbf{m} \oplus \mathbf{1}) \oplus 1))$, ja tästä seuraa haluttu väite.$\dashv$

Lemma 2.3.8 *Jos $i < j$, niin $Q \vdash \mathbf{i} < \mathbf{j}$.*

Todistus. Jos $i < j$, niin jollekin m pätee $(m + 1) + i = j$. Lemman 2.3.2 perusteella $Q \vdash (\mathbf{m} \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{i} = \mathbf{j}$ ja tästä seuraa $Q \vdash \exists x_3((x_3 \oplus \mathbf{1}) \oplus x_1 = x_2)$.$\dashv$

Lemma 2.3.9 *Kaikille i, $Q \vdash \forall x(x < \mathbf{i} \rightarrow x = \mathbf{0} \vee ... \vee x = \mathbf{i} - \mathbf{1})$. (Tapauksessa $i = 0$ tyhjä disjunktio tulkitaan kaavaksi $\neg\mathbf{0} = \mathbf{0}$).*

Todistus. Oletetaan, että $i = 0$. Aksiooman Q_6 perusteella $\forall x(x = \mathbf{0} \vee \exists y(y \oplus \mathbf{1} = x))$. Oletetaan, että $x < \mathbf{0}$, eli että $\exists w((w+1)+x = \mathbf{0})$. Jos $x = \mathbf{0}$ pätee, niin aksioomaa Q_2 soveltamalla saadaan $w \oplus \mathbf{1} = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{0} = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus x = \mathbf{0}$, mikä on mahdotonta aksiooman Q_0 perusteella. Jos taas $x = y \oplus \mathbf{1}$ pätee, aksiooman Q_3 avulla saadaan $((w \oplus \mathbf{1}) \oplus y) \oplus \mathbf{1} = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus (y \oplus \mathbf{1}) = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus x = \mathbf{0}$, mikä on jälleen mahdotonta aksiooman Q_0 perusteella.

Seuraavaksi oletetaan, että $Q \vdash \forall x(x < \mathbf{i} \rightarrow x = \mathbf{0} \vee ... \vee x = \mathbf{i} - \mathbf{1})$. On todistettava, että $Q \vdash \forall x(x < \mathbf{i} \oplus \mathbf{1} \rightarrow x = \mathbf{0} \vee ... \vee x = \mathbf{i})$. Oletetaan, että $x < \mathbf{i} \oplus \mathbf{1}$, eli että $\forall w((w \oplus \mathbf{1}) \oplus x = \mathbf{i} \oplus \mathbf{1})$ pätee. Aksiooman Q_6 perusteella saadaan $\exists y(x = y \oplus \mathbf{1} \vee) \vee x = \mathbf{0}$. Jos $x = y \oplus \mathbf{1}$ pätee, niin saadaan $\mathbf{i} \oplus \mathbf{1} = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus x = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus y\mathbf{1} = ((w \oplus \mathbf{1}) \oplus y) \oplus \mathbf{1}$ (Aksiooman Q_3 perusteella), mistä aksiooman Q_1 perusteella saadaan $\mathbf{i} = (w \oplus \mathbf{1}) \oplus y$, joten $y < \mathbf{i}$. Induktio-oletuksen perusteella saadaan nyt $y = \mathbf{0} \vee ... \vee y = \mathbf{i} - \mathbf{1}$ (jos $i = 0$, saadaan $\neg\mathbf{0} = \mathbf{0}$). Tästä seuraa, että $x = \mathbf{1} \vee ... \vee x = \mathbf{i}$ (tapauksessa $i = 0$, pätee yhä $\neg\mathbf{0} = \mathbf{0}$), joten kokonaisuudessa saamme $x = \mathbf{0} \vee ... \vee x = \mathbf{i}$, mistä seuraa väite. $\dashv$

Lemma 2.3.10 *Kaikille i, $Q \vdash \forall x(\mathbf{i} < x \rightarrow x = \mathbf{i} \oplus \mathbf{1} \vee \mathbf{i} < x)$.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathbf{i} < x$, eli, että $\exists w((w \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{i}) = x$ pätee. Aksiooman Q_6 perusteella saadaan jälleen $w = \mathbf{0} \vee \exists y(w = y \oplus \mathbf{1})$. Kaavoista $w = \mathbf{0}$ ja $(w \oplus 1) \oplus \mathbf{i} = x$ seuraa $(\mathbf{0} \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{i} = x$, mistä Lemman 2.3.2 perusteella saadaan $x = \mathbf{i} \oplus \mathbf{1}$. Kaavoista $w = (y \oplus 1)$ ja $(w \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{i} = x$ saadaan $((y \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}) = x$, mistä Lemman 2.3.7 perusteella saadaan $(y \oplus 1) \oplus (\mathbf{i} \oplus \mathbf{1})$ ja täten $\mathbf{i} \oplus \mathbf{1} < x$. $\dashv$

Lemma 2.3.11 *Kaikille i, $Q \vdash \forall x(\mathbf{i} < x \vee x = \mathbf{i} \vee x < \mathbf{i})$.*

Todistus. Todistus perustuu induktioon luvun i suhteen. Oletetaan, että $i = 0$. Oletetaan, että $\neg x = \mathbf{0}$. Aksiooman Q_6 perusteella saadaan $\exists y(x = y \oplus \mathbf{1})$ ja aksiooman Q_2 perusteella saadaan $\exists y((y \oplus \mathbf{1}) \oplus \mathbf{0} = x$, toisin sanoen $\mathbf{0} < x$.

Oletetaan sitten, että $Q \vdash \forall x(\mathbf{i} < x \vee x = \mathbf{i} \vee x < \mathbf{i})$ pätee. Lemman 2.3.10 perusteella saadaan $Q \vdash \forall x(\mathbf{i} < x \to x = \mathbf{i} \oplus \mathbf{1} \vee \mathbf{i} \oplus \mathbf{1} < x)$. Lemman 2.3.8 perusteella $Q \vdash \forall x(x = \mathbf{i} \to x < \mathbf{i} \oplus \mathbf{1})$ pätee. Lemmojen 2.3.8 ja 2.3.9 perusteella $Q \vdash \forall x(x < \mathbf{i} \to x < \mathbf{i} \oplus \mathbf{1})$ on voimassa. Kolmesta edellisestä lauseesta seuraa välittömästi $Q \vdash \forall x(\mathbf{i} \oplus \mathbf{1} < x \vee x = \mathbf{i} \oplus \mathbf{1} \vee x < \mathbf{i} \oplus \mathbf{1})$.$\dashv$

Seuraavaksi todistetaan, että minimalisaatiolla saadut funktiot ovat esitettävissä teoriassa Q.

Lemma 2.3.12 *Olkoon f $n+1$-paikkaisen rekursiivisen relaation R karakteristinen funktio. Jos g on saatu relaatiosta R minimalisaatiolla: $g(x_1, ..., x_n) =$ pienin y siten, että $R(x_1, ..., x_n)$ ja $\phi(x_1, ..., x_{n+2})$ esittää funktiota f teoriassa Q, niin kaava $\psi(x_1, ..., x_{n+1}) = (\phi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, \mathbf{1}) \wedge \forall w(w < x_{n+1} \to \neg\phi(x_1, ..., x_n, w, \mathbf{1})))$ esittää funktiota g.*

Todistus. Oletetaan, että $g(p_1, ..., p_n) = i$. Tällöin $f(p_1, ..., p_n, i) = 0$ ja kaikille $j < i$ pätee, että $f(p_1, ..., p_n, i) \neq 0$. Koska ϕ esittää funktiota f teoriassa Q, saadaan $Q \vdash \phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, \mathbf{i}, \mathbf{1})$ ja $Q \vdash \neg\phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, \mathbf{j}, \mathbf{1})$ kaikilla $j < i$. Näiden ja lemman 2.3.9 perusteella saadaan $Q \vdash \forall w(w < \mathbf{i} \to \neg\phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, w, \mathbf{1}))$ (*) ja tästä edelleen $Q \vdash \psi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, \mathbf{i})$.

Nyt on vielä todistettava, että $Q \vdash \forall x_{n+1}(\psi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, x_{n+1}) \to x_{n+1} = \mathbf{i})$. Oletetaan, että $\psi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, x_{n+1})$ pätee, eli toisin sanoen, että $\phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, x_{n+1}, \mathbf{1}) \wedge \forall w(w < x_{n+1} \to \neg\phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, w, \mathbf{1}))$ on voimassa. Koska $Q \vdash \phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n}, \mathbf{i}, \mathbf{1})$ ja $\forall w(w < x_{n+1} \to \neg\phi(\mathbf{p_1}, ..., \mathbf{p_n},, w, \mathbf{1}))$ ovat voimassa, saadaan nyt $\neg\mathbf{i} < x_{n+1}$. Toisaalta, kaavoista $\phi(p_1, ..., p_n, x_{n+1}, \mathbf{1})$ ja (*) seuraa $\neg x_{n+1} < \mathbf{i}$. Siten Lemman 2.3.11 perusteella $x_{n+1} = \mathbf{i}$, mistä seuraa väitteen jälkimmäinen osa.

Lause 2.3.13 *Kaikki rekursiiviset relaatiot ja funktiot ovat esitettävissä teoriassa Q.*

Todistus. Seuraa Lemmoista 2.3.1 - 2.3.3, 2.3.5, 2.3.6 ja 2.3.12.

3. Luonnollisten lukujen karakterisointi

Logiikat *ED* ja *EDP* poikkeavat huomattavasti ensimmäisen kertaluvun logiikasta, koska luonnolliset luvut voidaan karakterisoida niissä yhdellä lauseella θ_0 siten, että $\mathcal{M} \models \theta_0$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \cong \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. Tästä seuraa se, että jos L on äärellinen aakkosto ja $L^{\mathbb{N}} \subseteq L$, niin sekä (ED, L)-validien että (EDP, L)-validien kaavojen joukko on Π^1_1-täydellinen. Tästä seuraa myös se, ettei kummallakaan logiikalla ole efektiivistä, täydellistä ja korrektia aksiomatisointia.

3.1. Äärellisten lukujonojen koodaaminen

Seuraavana määritellään lukuteorian karakterisoinnissa tarvittava $L^{\mathbb{N}}_{\omega\omega}$-kaava $\phi_{cod}(v_0, v_1, v_2)$, jolla koodataan äärelliset lukujonot. Ideana on se, että jos v_0 on lukujonon koodi, niin v_2 on kyseisen lukujonon alkio, jonka paikkaluku on v_1. Koska ilmeisesti ϕ_{cod} esittää funktiota, voimme käyttää merkintää $v_0[v_1] = v_2$. Täsmällisemmin ilmaistuna, kaava $v_0[v_1] = v_2$ *koodaa äärellisen lukujonon* mikäli seuraavat kaksi ehtoa C_n, $n = 0, 1$ toteutuvat kaikissa teorian Q malleissa:

(C_0) $\forall x \forall y \exists z \forall u (x[y] = u \leftrightarrow u = z)$
(C_1) $\forall x \forall y \forall z \exists x_0 (x_0[y] = z \wedge \forall u \forall w (\neg u = y \wedge x_0[u] = w) \rightarrow x[u] = w))$

Tästä alkaen jono ja sen koodi samaistetaan, ellei voi syntyä sekaannusta. Olkoon $x_0 ... x_n$ äärellinen lukujono. Alkion x_i *kohdaksi* sanotaan lukua i. Ehto C_0 sanoo, että ϕ_{cod} määrittelee relaation, joka on funktio, ja on määritelty kaikilla lukupareilla x, y. Ehdon C_1 muotoilu takaa sen, että on olemassa ainakin yksi jono x_0 siten, että sen alkio, jonka kohta on y, on u. Lisäksi ehto sanoo, että jokaista jonoa x kohti on olemassa jono x_0 siten, että jonojen x ja x_0 alkiot ovat muuten samat, paitsi, että jonon x_0 alkio, jonka kohta on y, on u.

Konstruoidaan nyt rekursiivinen funktio $Cod(w, x)$, jota teoriassa Q esittävä kaava toteuttaa C-ehdot.

Funktio $\pi(x,y) = \frac{1}{2}((x+y)^2 + 3x + y)$ on bijektio $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Tällöin sillä on rekursiiviset käänteisfunktiot $\rho(z)$ ja $\sigma(z)$:

$$\rho(z) = (\mu x \leq z)(\exists y \leq z)(\pi(x,y) = z)$$
$$\sigma(z) = (\mu y \leq z)(\exists x \leq z)(\pi(x,y) = z)$$

Määritellään nyt rekursiosäännön ja funktioiden yhdistämisen avulla funktio $Cod(w,x)$, jonka esitys teoriassa Q toteuttaa ehdot C_0 ja C_1. Olkoon funktio $Sbl(w,x)$ seuraava funktio:

$$Sbl(w,0) = w$$
$$Sbl(w,n+1) = \sigma(Sbl(w,n))$$

Asetetaan nyt $Cod(w,x) = \rho(Sbl(w,x))$.

Lause 3.1.1 *$L^{\mathbb{N}}$-kaava $v_0[v_1] = v_2$, joka esittää funktiota $Cod(w,x)$ teoriassa Q toteuttaa ehdon C_1*

Todistus. Olkoon y ja u mielivaltaisia. Merkitään $\pi^0(q) = \pi(q,0)$ ja $\pi^{n+1}(q) = \pi(0,\pi^n(q))$. Asetetaan nyt $x_0 = \pi^y(u)$. Nyt selvästi $Cod(x_0,y) = u$. Siis ehdon C_1 ensimmäinen puoli on todistettu. Olkoon nyt x jonkin jonon koodi sekä y ja u jälleen mielivaltaisia. Olkoon n pienin m, jolle pätee, että $Sbl(w,m) = 0$ ja olkoon $p = max(n,y)$. Olkoon nyt $x = \pi(Cod(x,0), \pi(Cod(x,1)...\pi(Cod(x,y-1), \pi(u, \pi(Cod(x,y+1), \pi(...\pi(Cod$
$(x,p),0)...))))...))$. Nyt x toteuttaa ehdon C_1 jälkimmäisen osan.$\dashv$

3.2. Totuusmääritelmän formalisointi

Luonnollisten lukujen struktuuri karakterisoidaan logiikassa $ED(P)$ siten, että liitetään ensin jokaiseen kaavaan ϕ luonnollinen luku $\ulcorner\phi\urcorner$, minkä muodostetaan kaava $S(X,x)$ joka sanoo, että mikäli $\ulcorner\phi\urcorner < x$ ja $\langle\mathbb{N},+,\cdot,0,1\rangle \models S(X,x)\langle w,W\rangle$, niin $\langle\mathbb{N},+,\cdot,0,1\rangle \models \forall pX(\underline{\ulcorner\phi\urcorner},p)$ jos ja vain jos $\langle\mathbb{N},+,\cdot,0,1\rangle \models \phi$. Lemman 3.3.3 avulla todistetaan, että jos $\mathcal{M}$ on teorian Q malli ja $\mathcal{M} \models \forall x\exists XS(X,x)$, niin $\mathcal{M} \cong \langle\mathbb{N},+,\cdot,0,1\rangle$, mikä on haluttu tulos.

3.2.1. Syntaksin aritmetisointi

Seuraavana koodataan kaavat π-funktion avulla.

Olkoon L numeroituva. Käytännön asioiden helpottamiseksi liitetään jokaiseen aakkostoon L toinen aakkosto L' seuraavasti: Olkoon $f : L \mapsto \mathbb{N}$ aakkoston L numerointi ja olkoon $g : L \mapsto \mathbb{N}$ funktio, jolle:

$$g(s) = \begin{cases} n, & \text{jos } s \text{ on } n\text{-paikkainen relaatiosymboli;} \\ n+1, & \text{jos } s \text{ on } n\text{-paikkainen funktiosymboli;} \\ 1, & \text{jos } s \text{ on vakiosymboli.} \end{cases} \tag{1}$$

Nyt $L' = \{R^{g(s)}_{f(s)} | s \in L\}$, missä symbolit R^n_m ovat toisistaan poikkeavia n-paikkaisia relaatiosymboleita. Liitetään nyt jokaiseen L-malliin $\mathcal{M}$ L'-malli $\mathcal{M}'$ seuraavasti. Asetetaan ensin $dom(\mathcal{M}) = dom(\mathcal{M}')$. Määritellään sitten aakkoston L' tulkinnat mallissa $\mathcal{M}'$ seuraavasti:

$(m_1, ..., m_{g(P)}) \in (R^{g(s)}_{f(s)})^{\mathcal{M}'}$ jos ja vain jos
  $(m_1, ...m_{g(P)}) \in P^{\mathcal{M}}$, kun P on relaatiosymboli,
  $P^{\mathcal{M}}(m_1, ..., m_{g(P)-1}) = m_{g(P)}$, kun P on funktiosymboli ja
  $P^{\mathcal{M}} = m_1$, kun P on vakiosymboli.

Liitetään sitten jokaiseen jokaiseen L'_{SO}-kaavoissa esiintyvään merkkiin oma koodinsa:

$\#(=)$	$= 1$	$\#())$	$= 5$
$\#([)$	$= 2$	$\#(\neg)$	$= 6$
$\#(])$	$= 3$	$\#(\wedge)$	$= 7$
$\#(()$	$= 4$	$\#(\exists)$	$= 8$
$\#(Q_0)$	$= 9$		
$\#(v_n)$	$= 10 + 3n$		
$\#(V^m_n)$	$= 11 + 3\pi(m-1, n)$		
$\#(R^m_n)$	$= 12 + 3n$		

Nyt koodaus tapahtuu siten, että jos w on merkeistä $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \oplus, \otimes, =, [,], \neg, \wedge, \exists, v_n,$ muodostuva sana $w_0...w_n$, niin sanan w koodi $\lceil w \rceil$, on
$\pi(w_0, \pi(w_1...\pi(w_{n-1}, \pi(w_n, 0))...))$.

Merkintä $\lceil \phi \rceil$ tarkoittaa kaavan ϕ koodia ja merkintä $\underline{\lceil \phi \rceil}$ koodin nimeä.

Lemma 3.2.1 *Jos ψ on kaavan ϕ alikaava, niin $\ulcorner\psi\urcorner \leq \ulcorner\phi\urcorner$. Jos muuttujalla v_i on esiintymä kaavassa ϕ, niin $i < \phi$.*

Todistus Triviaali.$\dashv$

3.2.2. Sijoitusoperaatio

Luonnollisten lukujen joukon karakterisoinnissa tarvitaan kaavaa, joka esittää sijoitusoperaatiota teoriassa Q. Kaavan olemassaolon todistamiseksi todistetaan, että sijoitusoperaatio on rekursiivinen relaatio.

Olkoon $s_p(m, n, k)$ seuraava relaatio:
$m = \ulcorner w\urcorner, k = \ulcorner w'\urcorner$ ja w' saadaan kaavasta w sijoittamalla muuttujan v_p tilalle kaikkialla termi $\mathbf{n}$.

Relaation s_p rekursiivisuuden todistamiseksi tarvitaan muutamia rekursiivisia funktioita, joiden avulla sijoitusoperaation määritteleminen on suhteellisen helppoa.

Olkoon $Gett(n, m)$ seuraava rekursiosäännöllä määritelty rekursiivinen funktio:

$$Gett(0, m) = m,$$
$$Gett(n + 1, m) = Gett(n, \sigma(m)).$$

Nyt voidaan määritellä seuraavat rekursiiviset funktiot:

$$Strlen(m) = (\mu x)(Gett(x, m) = 0)$$
$$Getlast(m) = Get(Strlen(m) - 1, m)$$

Vastaavasti voidaan määritellä rekursiivinen funktio $Geth(n, m)$ seuraavasti:

$$Geth(0, m) = 0,$$
$$Geth(n + 1, m) = \pi(\rho(m), Geth(n, m))$$

Nyt voidaan määritellä loput tarvittavat rekursiiviset funktiot:

$$Striplast(m) = Geth(Strlen(m) - 1, m)$$

$$Termadd(0, m) = m,$$
$$Termadd(n + 1, m) = \pi(\ulcorner\mathbf{1}\urcorner, \pi(\ulcorner\oplus\urcorner, Termadd(n, m))).$$

Sijoitusrelaatio saadaan suoraan seuraavan rekursiivisen funktion sovelluksena.

$$
\begin{aligned}
&Replacevar(0, m, k, q, p) = k, \\
&Replacevar(n + 1, m, k, q, p) = Replacevar(n, Striplast(m), Termadd(\\
&\qquad n - 1, \pi(\ulcorner \mathbf{1} \urcorner, k)), q, p), \text{ jos } Getlast(m) = \ulcorner v_p \urcorner \text{ ja} \\
&Replacevar(n + 1, m, k, q, p) = Replacevar(n, Striplast(m), \pi(\\
&\qquad Getlast(m), k), q, p) \text{ muutoin.}
\end{aligned}
$$

Korollaari 3.2.2 *Relaatio s_p on rekursiivinen*

Todistus. $s_p(m, n, k) \leftrightarrow Replacevar(Strlen(m), m, 0, n, p) = k.$ $\dashv$

3.2.3. Tulkinnan koodaaminen

Olkoon L numeroituva ja L' aakkosto, joka on saatu aakkostosta L korvaamalla funktio- ja vakiosymbolit relaatiosymboleilla kuten kappaleessa 3.2.1.

Tulkinnan koodaamissa tarvitaan kaavoja, jotka esittävät seuraavia relaatioita:

$$
\begin{aligned}
&R_{R^i_j} = \{(x_1, ..., x_i, t) | t = \ulcorner R^i_j(v_{x_1}, ..., v_{x_i}) \urcorner\}, \text{ kun } R^i_j \in L' \\
&R_\neg = \{(t, \ulcorner \psi \urcorner) | t = \ulcorner \neg\psi \urcorner\} \\
&R_\wedge = \{(t, \ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \phi \urcorner) | t = \ulcorner \psi \wedge \phi \urcorner\} \\
&R_{\exists 1} = \{(t, j, \ulcorner \psi \urcorner) | t = \ulcorner \exists v_j \psi \urcorner\} \\
&R_{\exists 2} = \{(t, i, j, \ulcorner \psi \urcorner) | t = \ulcorner \exists V^i_j \psi \urcorner\}
\end{aligned}
$$

Merkitään kaavoja, jotka esittävät yllämainittuja relaatioita seuraavasti: $\phi_{R^i_j}$, $\phi_\neg$, $\phi_\wedge$, $\phi_{\exists 1}$ ja $\phi_{\exists 2}$.

Oletetaan nyt, että L on äärellinen, $L^{\mathbb{N}} \subseteq L$ ja että L' on saatu kuten yllä. Olkoon q aakkostossa L' esiintyvien symbolien lukumäärä ja p maksimi aakkoston L' symbolien paikkaluvuista. Olkoon $S(X, w, u, u_0, u_1, y_1, ..., y_p)$ seuraavien kaavojen S_n, n=0,1,2,3 konjunktio:

$$
\begin{aligned}
&S_0(X, w, u, y_1, ..., y_p): && \textstyle\bigwedge_{R^i_j \in L'} (\phi_{R^i_j}(y_1, ..., y_i, u) \to (X(w, u) \leftrightarrow \exists x_1 ... \exists x_i(\\
& && \qquad \textstyle\bigwedge_{k=1}^{i} (w[y_k] = x_k) \wedge R^i_j(x_1, ..., x_i)))) \\
&S_1(X, w, u, u_0): && \phi_\neg(u, u_0) \to (X(w, u) \leftrightarrow \neg X(w, u_0)) \\
&S_2(X, w, u, u_0, u_1): && \phi_\wedge(u, u_0, u_1) \to (X(w, u) \leftrightarrow (X(w, u_0) \wedge X(w, u_1)))
\end{aligned}
$$

$$S_3(X,w,u,u_0,y_0): \qquad \phi_{\exists 1}(u,y_0,u_0) \to (X(w,u) \leftrightarrow \exists w_0(X(w_0,u_0)\wedge \\ \forall z \forall z_0(\neg z = y_0 \wedge w_0[z] = z_0) \to w[z] = z_0)$$

Käytetään merkintää $Cl(x,\vec{v})$ kaavasta $u \leq x \wedge u_0 \leq x \wedge u_1 \leq x \wedge y_1 \leq x \wedge ... \wedge y_p \leq x$. Merkintä $St(X,x)$ tarkoittaa kaavaa $\forall w \forall u \forall u_0 \forall u_1 \forall y_1 ... \forall y_p(Cl(x,\vec{v}) \wedge S(X,w,u,u_0,u_1,y_1,...,y_p))$. Kaava $St(X,x)$ tarkoittaa intuitiivisesti, että X on toteutuvuusrelaatio $L^{\mathbb{N}S}_{\omega\omega}$-kaavoille, joiden koodi on pienempi kuin x.

$St_s(\phi,x,x_0,...,x_n)$, missä $x_0,...,x_n$ eivät esiinny kaavassa $St(X,x)$, eikä kaavassa ϕ, tarkoittaa kaavaa, joka saadaan kaavasta $St(X,x)$ korvaamalla kaikki muuttujan $X(u,y)$ esiintymät kaavalla $\phi(u,y,x_0,...,x_n)$.

3.3. Luonnollisten lukujen karakterisointi

Luonnolliset luvut voidaan karakterisoida lauseella $\theta_0 = Q \wedge \forall x \exists X(St(X,x))$. Tämän todistamiseksi todistetaan ensin kolme lemmaa.

Lemma 3.3.1 *Jos $\phi(v_0,...,v_n)$ on elementaarinen erikoiskaava, niin*

$$Q \models (\ulcorner\phi\urcorner \leq x \wedge St(X,x)) \to (X(w,\ulcorner\phi\urcorner) \leftrightarrow \exists x_0 ... \exists x_n((\wedge^n_{k=0} w[\mathbf{k}] = x_k)) \\ \wedge \phi(x_0,...,x_n))).$$

Todistus. Väite todistetaan induktiolla. Jos $\ulcorner\phi\urcorner > x$, pitää väite triviaalisti paikkansa. Oletetaan siis, että $\ulcorner\phi\urcorner \leq x$ ja $St(X,x)$ voimassa.

Oletetaan seuraavaksi, että ϕ on kaava $R^i_j(v_{x_1},...,v_{x_i})$. Tällöin pätee: $\phi_{R^i_j}(x_1,...,x_i,\underline{\ulcorner\phi\urcorner})$. Lemman 3.2.1 perusteella $Cl(x,\vec{v})$ pätee, joten saadaan S_0, mistä väite seuraa suoraan.

Oletetaan seuraavaksi, että ϕ on muotoa $\neg\psi$, ja että Lemman oletus pätee kaavalle ψ. Tällöin pätee $\phi_\neg(\underline{\ulcorner\neg\psi\urcorner},\underline{\ulcorner\psi\urcorner})$. Nyt saadaan edellistä kappaletta seuraten $X(w,\underline{\ulcorner\neg\psi\urcorner}) \leftrightarrow \neg\overline{X(w,\underline{\ulcorner\psi\urcorner})}$. Induktio-oletuksen mukaan väite pätee kaavalle ψ, joten saadaan:

$$Q \models (\underline{\ulcorner\phi\urcorner} \leq x \wedge St(X,x)) \to (X(w,\ulcorner\neg\phi\urcorner) \leftrightarrow \neg\exists x_0 ... \exists x_n((\\ \bigwedge^n_{k=0} w[\mathbf{k}] = x_k) \wedge \phi(x_0,...,x_n))) \iff$$

$$Q \models (\underline{\ulcorner\phi\urcorner} \leq x \wedge St(X,x)) \to (X(w,\ulcorner\neg\phi\urcorner) \leftrightarrow \forall x_0 ... \forall x_n(($$

$\bigwedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k) \rightarrow \neg\phi(x_0, ..., x_n)).$

Koska on olemassa termit $x_0, ..., x_n$, joille pätee $\wedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k$ mielivaltaisella w, niin lause $\forall x_0 ... \forall x_n((\wedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k) \rightarrow \neg\phi(x_0, ..., x_n))$ on lauseen $\exists x_0 ... \exists x_n((\wedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k) \wedge \neg\phi(x_0, ..., x_n))$ kanssa loogisesti ekvivalentti, mistä seuraa väite negaatiolle.

Olkoon ϕ nyt muotoa $\psi \wedge \theta$, ja että lemman oletus pätee kaavoille ψ ja θ. Edellistä päättelyä seuraten päästään muotoon:

$$Q \models (\underline{\ulcorner\phi\urcorner} \leq x \wedge St(X, x)) \rightarrow (X(w, \ulcorner\psi \wedge \theta\urcorner) \leftrightarrow (\exists x_0 ... \exists x_n((\bigwedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k) \wedge \psi(x_0, ..., x_n)) \wedge \exists x_{n+1} ... \exists x_{n+m+1}((\bigwedge_{k=n+1}^{n+m+1} w[\mathbf{k}] = x_k) \wedge \theta(x_{n+1}, ..., x_{n+m+1}))))$$

Koska kaavat $\phi \wedge \exists x_0 \psi$ ja $\exists x_0(\phi \wedge \psi)$ ovat loogisesti ekvivalentteja, jos x_0 ei esiinny ϕ:ssä vapaana, saadaan haluttu väite.

Olkoon sitten ϕ muotoa $\exists x_0 \psi$. Nyt saadaan:

$$Q \models (\underline{\ulcorner\phi\urcorner} \leq x \wedge St(X, x)) \rightarrow (X(w, \ulcorner\exists x_0 \psi\urcorner) \leftrightarrow (\exists w_0((\exists x_0 ... \exists x_n((\bigwedge_{k=0}^{n} w_0[\mathbf{k}] = x_k) \wedge \psi(x_0, ..., x_n))) \wedge \forall z \forall z_0(\neg z = \mathbf{0} \wedge w_0[z] = z_0) \rightarrow w[z] = z_0))))$$

Edellisen kaavassa olevan ekvivalenssin vasen puoli 'sanoo', että on olemassa jono w_0 siten, että se on muuten sama kuin jono w, mutta ne poikkeavat nollannen alkion kohdalla siten, että jonon w_0 alkiot $0, ..., n$ toteuttavat kaavan ψ. Toisin sanoen kaava $\exists x_0 \psi$ toteutuu jonolla w. Tämän takia edellinen kaava on ekvivalentti kaavan

$$Q \models (\underline{\ulcorner\phi\urcorner} \leq x \wedge St(X, x)) \rightarrow (X(w, \ulcorner\exists x_0 \psi\urcorner) \leftrightarrow (\exists x_1 ... \exists x_n((\bigwedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k) \wedge \exists x_0 \psi(x_0, ..., x_n)))),$$

kanssa, mistä seuraa väite.$\dashv$

Lemma 3.3.2 *Jokaista luonnollista lukua m kohti on olemassa sellainen elementaarinen L-kaava $\theta(v_0, v_1)$ (jossa ei ole muita vapaita muuttujia kuin v_0 ja v_1), että $Q \models St(\theta, \mathbf{m})$.*

Todistus. Kaavojen $v_1 = \underline{\ulcorner\phi\urcorner} \wedge \exists x_0 ... \exists x_n(\wedge_{i=0}^{k} \phi(v_0, \mathbf{k}, x_k) \wedge \phi(x_0, ... x_n))$ disjunktio, missä ϕ käy läpi kaikki kaavat joille $\ulcorner\phi\urcorner \leq m$, on haluttu kaava.$\dashv$

Seuraavan lemman avulla voidaan todistetaan se, että luonnollisten lukujen struktuuri on karakterisoitavissa logiikoissa *ED* ja *EDP*. Todistuksessa käytetään samanlaista diagonaalikonstruktiota kuin Gödelin epätäydellisyyslauseen todistuksessa.

Lemma 3.3.3 *Jokaista elementaarista L-kaavaa $\theta(v_0,...,v_{n+2})$ kohti on olemassa elementaarinen L-kaava $\psi(v_0,...,v_n)$ siten, että $T \models St(\theta,x,x_0,...,x_n) \rightarrow x \leq \underline{\lceil\psi\rceil}$.*

Todistus. Lemman 3.3.1 perusteella mille tahansa elementaariselle L-erikoiskaavalle pätee:

$$\begin{aligned}Q \models (\lceil\phi\rceil \leq x \wedge St(\theta,x,x_0,...,x_n)) \rightarrow (\theta(w,\lceil\phi\rceil,x_0,...,x_n) \leftrightarrow \\ \exists y_0...y_n(\wedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = y_k) \wedge \phi(y_0,...,y_n))).\end{aligned}$$

Koska tämä lause pätee mielivaltaiselle jonolle w, niin se pätee erityisesti sellaiselle w, jolle $w[\mathbf{k}] = x_k$, eli pätee (*):

$$\begin{aligned}Q \models (\lceil\phi\rceil \leq x \wedge St(\theta,x,x_0,...,x_n)) \rightarrow (\exists w(\wedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = x_k \wedge \\ \theta(w,\underline{\lceil\phi\rceil},x_0,...,x_n)) \leftrightarrow \phi(x_0,...,x_n)).\end{aligned}$$

Käytetään nyt merkintää $\gamma(v_0,...,v_{n+1})$ kaavasta $\exists w(\wedge_{k=0}^{n} w[\mathbf{k}] = v_{k+1}) \wedge \theta(w,v_{n+1},v_0,...,v_n))$. Olkoon kaava $\delta(v_0,...,v_{n+1})$ seuraava kaava: $\neg\exists v_{n+2}(\gamma(v_0,...,v_n,v_{n+2}) \wedge \sigma_{n+1}(v_{n+1},v_{n+1},v_{n+2}))$, missä σ_{n+1} on kaava, joka esittää sijoitusoperaatiota. Voidaan olettaa, että muuttujat v_{n+1} ja v_{n+2} eivät esiinny sidottuina kaavoissa γ ja σ_{n+1}.

Olkoon $\psi(v_0,...,v_n)$ seuraava kaava: $\delta(v_0,...,v_n,\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_{n+1})\rceil})$. Nyt on voimassa:

$$\begin{aligned}&\gamma(v_0,...,v_n,\underline{\lceil\psi(v_0,...,v_n)\rceil}) \Longleftrightarrow \\ &\gamma(v_0,...,v_n,\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_n,\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_{n+1})\rceil})\rceil}) \Longleftrightarrow \\ &\exists v_{n+2}(\gamma(v_0,...,v_n,v_{n+2}) \wedge v_{n+2} = \underline{\lceil\delta(v_0,...,v_n,\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_{n+1}\rceil})\rceil}) \Longleftrightarrow \\ &\exists v_{n+2}(\gamma(v_0,...,v_n,v_{n+2}) \wedge \sigma(\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_{n+1})\rceil},\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_{n+1})\rceil},v_{n+2})) \Longleftrightarrow \\ &\neg\delta(v_0,...,v_n,\underline{\lceil\delta(v_0,...,v_{n+1})\rceil}) \Longleftrightarrow \\ &\neg\psi(v_0,...,v_n).\end{aligned}$$

Korvaamalla lauseessa (*) kaavan ϕ esiintymät kaavalla ψ saadaan

$$Q \models \neg(\underline{\lceil\psi\rceil} \leq x) \wedge St(\theta,x,x_0,...,x_n)),$$

eli toisin sanoen:

$$Q \models St(\theta, x, x_0, ..., x_n) \rightarrow \neg \underline{\ulcorner \psi \urcorner} \leq x.$$

$\dashv$

Lemma 3.3.4 *Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, jonka rajoittuma aakkostoon $L^{\mathbb{N}}$ on isomorfinen mallin $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ kanssa. Tällöin $\mathcal{M} \models_{ED} \theta_0$.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{M}$ tällainen malli. Tällöin selvästi $\mathcal{M} \models_{ED} Q$. Lemman 3.3.2 perusteella $\mathcal{M} \models_{ED} \forall x \exists X(St(X, x))$. Tällöin siis $\mathcal{M} \models_{ED} \theta_0$.$\dashv$

Lause 3.3.5 *Jos $\mathcal{M}$ on L-malli ja $\mathcal{M} \models_{EDP} \theta_0$, niin mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma aakkostoon L on isomorfinen mallin $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ kanssa.*

Todistus. Olkoon lauseen ehto voimassa. Nyt on todistettava, että mielivaltaista $a \in M$ kohti on olemassa $L^{\mathbb{N}}$-termi $\mathbf{n}$, joka ei sisällä muuttujasymboleita, ja $\mathbf{n}^{\mathcal{M}} = a$. Koska nyt $\forall x \exists X(St(X, x))$ on *EDP*-tosi mallissa $\mathcal{M}$, on olemassa kaava $\phi(v_0, ..., v_n)$ ja joukon M alkiot $a_0, ..., a_{n-2}$ siten, että kaava $St(\phi, v_{n+1}, v_2, ..., v_n)$ toteutuu kaikilla tulkintajonoilla s, joille pätee: $s(2) = a_0$, ..., $s(n) = a_{n-2}$ ja $s(n+1) = a$. Lemman 3.3.3 nojalla on olemassa kaava $\psi(v_0, ..., v_{n-2})$ siten, että $\mathcal{M} \models v_{n+1} \leq \underline{\ulcorner \psi \urcorner} \langle s \rangle$. $\dashv$

Nyt saadaan haluttu tulos korollaarina:

Korollaari 3.3.6 *Jos $\mathcal{M}$ on L-malli, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) Mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma aakkostoon $L^{\mathbb{N}}$ on isomorfinen mallin $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ kanssa.

(2) $\mathcal{M} \models_{ED} \theta_0$

(3) $\mathcal{M} \models_{EDP} \theta_0$.

Todistus. Seuraa välittömästi Lemmasta 3.3.4, Lauseesta 3.3.5 ja Korollaarista 1.3.1.$\dashv$

4. Seurauksia

Sen avulla, että luonnollisten lukujen struktuuri voidaan karakterisoida logiikoissa *ED* ja *EDP* saadaan seuraavat tulokset:

(1) Kaikilla L pätee: $(ED(P), L)$-validien lauseiden joukko on Π^1_1-täydellinen.
(2) Ei ole olemassa efektiivistä aksioomajärjestelmää $\vdash$ siten, että $T \vdash \phi \Longleftrightarrow T \models_{ED(P)} \phi$.
(3) Logiikan *ED(P)* Δ-sulkeuma $\Delta(ED(P)) = \Delta(L(Q_0))$.
(4) Logiikka *ED(P)* ei ole Δ-suljettu.

4.1. Π^1_1-täydellisyys

Kaava on Π^1_1, mikäli se on toisen kertaluvun logiikassa muotoa $\forall V_0 ... \forall V_n \phi(V_0, ..., V_n, v_0, ..., v_m)$, missä ϕ on $L^F_{\omega\omega}$-kaava, jossa esiintyy vapaana korkeintaan relaatiomuuttujat $V_0, ..., V_n$. Kaava on Σ^1_1, jos se on toisen kertaluvun logiikassa muotoa $\exists V_0 ... \exists V_n \phi(V_0, ..., V_n, v_0, ..., v_m)$, missä ϕ on $L^F_{\omega\omega}$-kaava, jossa esiintyy vapaana korkeintaan relaatiomuuttujat $V_0, ..., V_n$.

Joukko $A \subseteq \mathbb{N}$ on Π^1_1, mikäli on olemassa $L^{\mathbb{N}}$-kaava $\phi(V_0, ..., V_n, v_0)$, jolle pätee: $A = \{n | \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle \models \forall V_0 ... \forall V_n \phi(V_0, ..., V_n, \mathbf{n})\}$.

Joukko on $A \subseteq \mathbb{N}$ on Π^1_1-täydellinen, mikäli jokaiselle joukolle B, joka on Π^1_1, on olemassa rekursiivinen funktio f siten, että $n \in B$ jos ja vain jos $f(n) \in A$.

Kaavajoukko on Π^1_1 (Σ^1_1, Π^1_1-täydellinen), jos kaavojen koodien joukko on Π^1_1 (Σ^1_1, Π^1_1-täydellinen).

4.1.1. Numeroituvien mallien koodaaminen

Seuraavaksi on rakennettava menetelmä numeroituvien L-mallien koodaamiseksi luonnollisten lukujen osajoukoiksi. Olkoon L numeroituva ja $\mathcal{M}$ mielivaltainen numeroituva L-malli.

Rakennetaan L-mallin $\mathcal{M}$ koodi vaiheittain seuraavasti. Korvataan ensin funktiosymbolit ja vakiosymbolit relaatiosymboleilla kuten kappaleessa 3.3.1, jolloin saadaan aakkosto L' ja L'-malli $\mathcal{M}'$. Olkoon f injektio joukolta M' joukolle $\mathbb{N}$, siten, että funktion f kuvajoukko on joko muotoa $\{x \in \mathbb{N} | x \leq n\}$ tai koko $\mathbb{N}$. Seuraavaksi liitetään jokaiseen n-paikkaiseen relaatiosymboliin R joukon $\mathbb{N}$ osajoukko A_R seuraavasti:

$$A_R = \{x \in \mathbb{N} | x = \pi(f(a_1), \pi(...\pi(f(a_n))...)) \text{ ja } (a_1, ..., a_n) \in R\}.$$

Olkoon g_n seuraava funktio $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$: $g_n(m) = 2^n(2m+1) - 1$ ja olkoon h injektio joukolta $X = \{A_R | R \in L'\}$ joukolle $\mathbb{N}$ siten, että funktion f kuvajoukolle annettu ehto täyttyy. Nyt voidaan määritellä mallin $\mathcal{M}$ koodi $\ulcorner \mathcal{M} \urcorner$:

$$\ulcorner \mathcal{M} \urcorner = g_0 f M' \cup \bigcup_{n \in hX} g_n h^{(-1)} n$$

4.1.2. *ED(P)*-totuusmääritelmän formalisointi

Atomikaavojen käsittelyssä tarvitaan kaavaa ϕ_R^{tr}, joka 'toteaa', päteekö tutkittava kaava tarkasteltavassa L-mallissa. Tähän tarvitaan seuraavaa relaatiota:

$$\begin{aligned} R^{tr} = \{(i, j, w, x) | & x = \pi(x_1, \pi(...\pi(x_i, 0)...)) \text{ ja } Y = \ulcorner \mathcal{M} \urcorner \\ & \text{jos ja vain jos } \mathcal{M} \models R_j^i(v_{x_1}, ..., v_{x_i})\langle s, S \rangle \text{ kaikilla} \\ & \text{tulkintafunktioilla } S \text{ ja kaikilla tulkintajonoilla } s \text{ joille pätee,} \\ & \text{että } s(i) = w[i] \text{ kaikilla } i < max\{x_1, ..., x_i\}\}. \end{aligned}$$

Olkoon $\phi_R^{tr}(Y, i, j, w, x)$ kaava, joka määrittelee edellämainitun relaation. Kaava on olemassa, koska kyseinen relaatio on rekursiivinen. Tämä kaava voidaan valita siten, että se ei riipu osajoukosta Y, koska relaatiomuuttuja Y voidaan samaistaa Lemman 1.2.2 perusteella predikaattisymbolin kanssa. Lisäksi tarvitaan kaava $\phi_{mod}(Y, y)$, joka toteutuu täsmälleen, mikäli y esittää koodissa Y universumin alkiota, eli mikäli y on parillinen ja $Y(y)$.

Lisäksi tarvitaan jaksossa 3.2.3 määriteltyjä kaavoja $\phi_\neg$, $\phi_\wedge$, $\phi_{\exists 1}$ ja $\phi_{\exists 2}$ sekä kaavoja ϕ_{rel}, ϕ_{ED}^{rep}, ϕ_{EDP}^{rep} ja ϕ_{fml}^L, jotka määrittelevät seuraavat relaatiot:

$$\begin{aligned} & R_{rel} = \{(x, i, j, t) | x = \pi(x_1, \pi(...\pi(x_i, 0)...)) \text{ ja } t = \ulcorner R_j^i(v_{x_1}, ..., v_{x_i}) \urcorner\}, \\ & R_{ED}^{rep} = \{(i, j, \ulcorner \phi(V_j^i) \urcorner, \ulcorner \psi(v_1, ..., v_i) \urcorner, t) | t = \ulcorner \phi(\psi) \urcorner\}, \\ & R_{EDP}^{rep} = \{(i, j, k, \ulcorner \phi(V_j^i) \urcorner, \ulcorner \psi(v_1, ..., v_{i+k}) \urcorner, t) | \\ & \qquad t = \ulcorner \exists v_{p+1} ... \exists v_{p+k} \phi(\psi(v_1, ..., v_i, v_{p+1}, ..., v_{p+k})) \urcorner, \text{ kun } p \text{ on suurin } l \\ & \qquad \text{siten, että } v_l \text{ esiintyy kaavassa } \phi(V_j^i) \text{ vapaana.}\} \text{ ja} \end{aligned}$$

$R^L_{fml} = \{(i, \ulcorner\phi\urcorner) |$ L-kaavassa ϕ esiintyy täsmälleen muuttujat $v_1, ..., v_i$ vapaana.$\}$.

Otetaan käyttöön nyt seuraavat kaavat:

$$
\begin{array}{ll}
S_0(X,Y,w,u,u_0,y_0,y_1): & \phi_{rel}(u_0,i,j,u) \to (X(w,u) \leftrightarrow \phi^{tr}_R(Y,y_0,y_1,u,u_0)). \\
S_1(X,w,u,u_0): & \phi_\neg(u,u_0) \to (X(w,u) \leftrightarrow \neg X(w,u_0)) \\
S_2(X,w,u,u_0,u_1): & \phi_\wedge(u,u_0,u_1) \to \\
 & \quad (X(w,u) \leftrightarrow (X(w,u_0) \wedge X(w,u_1))) \\
S_3(X,Y,w,u,u_0,y_0): & \phi_{\exists 1}(u,y_0,u_0) \to (X(w,u) \leftrightarrow \exists w_0(X(w_0,u_0) \wedge \\
 & \quad \forall z(w_0[y_0] = z \to \phi_{mod}(Y,z)) \wedge \forall z \forall z_0(\\
 & \quad \neg z = y_0 \wedge w_0[z] = z_0) \to w[z] = z_0) \\
S^L_4(X,w,u,u_0,y_0,y_1): & \phi_{\exists 2}(u,y_0,y_1,u_0) \to (X(w,u) \leftrightarrow (\exists p(\phi_{fml}(p,y_0) \wedge \\
 & \quad \phi^{rep}_{ED}(y_0,y_1,u,p,u_0) \wedge X(w,u_0)))) \\
S^L_5(X,w,u,u_0,y_0,y_1): & \phi_{\exists 2}(u,y_0,y_1,u_0) \to (X(w,u) \leftrightarrow (\exists p \exists q(\\
 & \quad \phi_{fml}(p, y_0 \oplus q) \wedge \phi^{rep}_{EDP}(y_0,y_1,q,u,p,t) \wedge \\
 & \quad X(w,t))))
\end{array}
$$

Olkoon $S^L_{ED}(X,Y)$ kaava $\forall w \forall u \forall u_0 \forall u_1 \forall y_0 \forall y_1 (S_0 \wedge S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4)$ ja $S^L_{EDP}(X,Y)$ kaava $\forall w \forall u \forall u_0 \forall u_1 \forall y_0 \forall y_1 (S_0 \wedge S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_5)$.

Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, w tulkintajono ja g_0, f kuten mallien koodausta käsittelevässä jaksossa. Olkoon w tulkintajono, ϕ L-kaava ja $A = \{a \in \mathbb{N} | v_a$ on vapaa kaavassa $\phi\}$. Otetaan käyttöön merkintä:

$$w^{\langle \mathbb{N},+,\cdot,0,1 \rangle}_\phi = \{p \in \mathbb{N} | p[i] = g_0(f(w(i)))\}.$$

Intuitiivisesti tämä on niiden äärellisten lukujonojen koodien joukko, jotka tulkitsevat kaavan ϕ vapaat muuttujat samoille alkioille mallin $\mathcal{M}$ koodissa kuin tulkintajono w oikeassa mallissa $\mathcal{M}$.

Seuraavat kaksi lausetta, joiden todistukset ovat yksinkertaisia induktiotodistuksia, kertovat sen, että antamamme määritelmä totuuden formalisoinnista on mielekäs. Olkoon $Tr^{\mathcal{M}}_{ED(P)} = \{(p, \ulcorner\phi\urcorner) | \phi$ on L_{SO}-kaava, jossa ei esiinny toisen kertaluvun muuttujia vapaana ja $\mathcal{M} \models_{ED(P)} \phi\langle w \rangle$ ja $p \in w^{\langle \mathbb{N},+,\cdot,0,1 \rangle}_\phi\}$.

Lause 4.1.1 *Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli. Tällöin $\langle \mathbb{N},+,\cdot,0,1 \rangle \models S^L_{ED(P)}(V^2_0, V^1_0)\langle s, S \rangle$, kun $S(2,0) = Tr^{\mathcal{M}}_{ED(P)}$ ja $S(1,0) = \ulcorner\mathcal{M}\urcorner$.*

Todistus. Väite todistetaan induktiolla. Olkoon $(p, \ulcorner\phi\urcorner) \in Tr^{\mathcal{M}}_{ED(P)}$. Jos ϕ on atomikaava, on väite selvä. Jos se taas on muotoa $\theta \wedge \psi$, $\neg\theta$ tai $\exists x\psi$, tarkastellaan kaavan ϕ alikaavoja. (tarvittaessa muunnellaan koodia p kaavan S_3 tapaan). Jos kaava on muotoa $\exists X\psi(X)$, tarkastellaan muotoa $\psi(\theta)$ *(ED)* ja muotoa $\exists\vec{y}(\phi(\theta(\vec{y})))$ *(EDP)* olevia kaavoja.

Nyt on todistettava, että seuraamalla näin kaavojen rakennetta päädytään äärellisen monen askeleen jälkeen atomikaavoihin. Olkoon p kaavan ϕ kvanttoriaste toisen kertaluvun muuttujien suhteen. Nyt jokaisessa induktioaskeleessa joko kaavojen koodi (lemman 3.2.1 nojalla) tai kvanttoriaste toisen kertaluvun muuttujien suhteen pienenee. Koska kvanttoriaste on äärellinen, on jonokin äärellinen, koska muuten voitaisiin rakentaa ääretön laskeva jono luonnollisia lukuja. $\dashv$

Lause 4.1.2 *Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli. Tällöin jos $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models S^L_{ED}(V^2_0, V^1_0)\langle s, S\rangle$, niin $(p, \ulcorner\phi\urcorner) \in S(2, 0)$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \models \phi\langle w\rangle$, kun $S(1, 0) = \ulcorner\mathcal{M}\urcorner$ ja $p \in w_\phi^{\langle \mathbb{N},+,\cdot,0,1\rangle}$.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $(p, \ulcorner\phi\urcorner) \in S(2, 0)$. Nyt käymällä *ED(P)*-totuusmääritelmä läpi kohta kohdalta havaitaan, että $\mathcal{M} \models \phi\langle w\rangle$. Oletetaan kääntäen, että $\mathcal{M} \models \phi\langle w\rangle$. Jälleen käymällä *ED(P)*-totuusmääritelmä kohta kohdalta läpi havaitaan, että $(p, \ulcorner\phi\urcorner) \in S(2, 0)$.$\dashv$

4.1.3. Π^1_1-täydellisyys

Tässä jaksossa todistetaan, että sekä *ED*- että *EDP*-validien lauseiden joukko on Π^1_1-täydellinen. Tästä seuraa, että nämä joukot eivät ole Σ^1_1 eikä rekursiivisesti numeroituvia.

Lemma 4.1.3 *Olkoon L numeroituva. Tällöin on olemassa Π^1_1-kaava $\phi_{ED(P)}(V^1_0, v_0)$ siten, että $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models \phi_{ED(P)}(\underline{\ulcorner\mathcal{M}\urcorner}, \underline{\ulcorner\phi\urcorner})$ jos ja vain jos ϕ on $(ED(P), L)$-validi L^S_{SO}-lause.*

Todistus. Jos lause ϕ on (ED, L)-validi, niin se toteutuu kaikissa L-malleissa $\mathcal{M}$. Lauseen 1.4.4 perusteella tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että lause ϕ toteutuu kaikissa numeroituvissa L-malleissa. Nimittäin jos olisi ylinumeroituva L-malli $\mathcal{M}'$, jossa $\neg\phi$ olisi *ED(P)*-tosi, niin $\neg\phi$ olisi *ED(P)*-tosi myös jossain numeroituvassa L-mallissa, mikä on ristiriita. Eli kaava $\forall X(S^L_{ED(P)}(Y,X) \to \forall w X(w,z))$ on haluttu kaava $\phi_{ED(P)}(Y,z)$. $\dashv$

Lemma 4.1.4 *On olemassa Σ^1_1-kaava $A(x,y)$ siten, että jokaista Σ^1_1-joukkoa B kohti on olemassa n siten, että $x \in B$ jos ja vain jos $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models A(x,n)$.*

Todistus. Ensiksi tarvitaan kaavaa $\phi_{rc}(R,n,m,x)$, joka koodaa numeroituvan monta relaatiota yhdeksi luonnollisten lukujen joukoksi siten, että kaavan intuitiivinen tulkinta on, että $x \in V^m_n$ koodatussa joukossa R. Kaava muodostetaan samaan tapaan kuin mallien koodauksen tapauksessa.

Seuraavaksi muodostetaan kaava $S(X,R)$, joka sanoo, että X on aakkoston $L^{\mathbb{N}} \cap \{R\}$ totuuspredikaatti mallille $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$, joka lisäksi 'osaa' tutkia, että päteekö muotoa $V^m_n(v_{i_0}, ..., v_{i_{m-1}})$ oleva kaavan ϕ_{rc} avulla koodatussa joukossa R.

Olkoon $A(v_0,y)$ seuraava kaava:

$$\exists X \exists R(y = \underline{\ulcorner F(X_0,...,X_n,v_0)\urcorner} \wedge S(X,R) \wedge \forall w(w[0] = v_0 \to X(w,y))),$$

missä $\{X_0,...,X_n\} \subseteq \{V^m_n | m-1, n \in \mathbb{N}\}$ ja kaava $\exists X_0 ... \exists X_n(F(X_0,...,X_n,v_0))$ määrittelee joukon B. Selvästi A on haluttu kaava.$\dashv$

Lemma 4.1.5 *On olemassa Π^1_1-joukko, joka ei ole Σ^1_1.*

Todistus. Asetetaan $\phi(x) = \neg A(x,x)$. ϕ on nyt Π^1_1. Jos se olisi Σ^1_1, olisi olemassa n siten, että pätisi $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models \phi(x)$ jos ja vain jos $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models A(x,n)$. Jos asetetaan $x = n$, saadaan $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models \neg A(n,n)$ jos ja vain jos $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models A(n,n)$, mikä on ristiriita.$\dashv$

Lemma 4.1.6 *Jos $A \subseteq \mathbb{N}$ on Π^1_1-täydellinen, niin se ei ole Σ^1_1.*

Todistus. Jos A olisi Σ^1_1, niin jokainen Π^1_1-joukko voitaisiin kuvata sille rekursiivisella funktiolla, joten ei olisi olemassa Π^1_1-joukkoa, joka ei olisi Σ^1_1.$\dashv$

Olkoon $S(X,w,u,u_0,u_1,y_1,...,y_p)$ kuten jaksossa 3.2.3, ja olkoon ϕ_{Tr} tämän kaavan universaalinen sulkeuma, jossa relaatiomuuttujan X esiintymät on korvattu kaksipaikkaisella relaatiosymbolilla R.

Lause 4.1.7 *Olkoon L äärellinen ja sellainen että $L^{\mathbb{N}} \cup \{P, R\} \subseteq L$, missä P on yksipaikkainen ja R on kaksipaikkainen relaatiosymboli. Tällöin (ED, L)-validien ((EDP, L)-validien) lauseiden joukko on Π^1_1-täydellinen ja siis ei Σ^1_1.*

Todistus. Jos joukko A on Π^1_1, niin on olemassa $L^F_{\omega\omega}$-kaava $\phi(X, n)$, jossa esiintyy vapaana muuttuja n ja relaatiomuuttuja X siten, että seuraava ehto on voimassa:

$$n \in A \Longleftrightarrow \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models \forall R\phi(R, n)$$

Muodostetaan nyt rekursiivinen funktio, joka kuvaa alkion n jollekin $(ED(P), L)$-validin lauseen koodille $\lceil\phi_n\rceil$. Olkoon θ_0 kuten korollaarissa 3.3.6. Nyt seuraava pätee:

$$n \in A \Longleftrightarrow ((\theta_0 \wedge \phi_{Tr}) \to R(\underline{\lceil\phi(P, n)\rceil})) \text{ on validi.}$$

Oletetaan ensin, että $n \in A$ ja oletetaan, että $\mathcal{M} \models \theta_0 \wedge \phi_{Tr}$. Tästä seuraa, että mallin $\mathcal{M}$ rajoittuma kieleen $L^{\mathbb{N}}$ on isomorfinen mallin $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ kanssa. Siis $\phi(P, n)$ toteutuu mallissa $\mathcal{M}$, joten saadaan, että $\mathcal{M} \models R(\underline{\lceil(P, n)\rceil})$. Oletetaan sitten, että $n \notin A$. Nyt siis $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, P\rangle \not\models \phi(P, n)$, joten yllämainittu kaava ei ole validi.$\dashv$

Matemaattisen logiikan kurssilla $([7], s.70 - 73)$ on käsitelty aksioomajärjestelmien efektiivisyyttä, korrektiutta ja täydellisyyttä, ja todistettu, että jos jokin aksioomasysteemi on efektiivinen, niin aksioomasysteemin teoreemojen joukko on rekursiivisesti numeroituva. Aksioomajärjestelmän korrektisuus tarkoittaa sitä, että jos lause ϕ päätellä teoriasta T, niin se on teorian T looginen seuraus. Täydellisyys tarkoittaa taas sitä, että jos lause ϕ on teorian T looginen seuraus, niin se voidaan päätellä. Efektiivisyys tarkoittaa intuitiivisesti sitä, että on jokin mekaaninen algoritmi, joka kertoo jokaisesta kaavajonosta, onko se todistus vai ei.

Korollaari 4.1.8 *Ei ole olemassa logiikan ED (EDP) efektiivistä aksioomajärjestelmää, joka olisi korrekti ja täydellinen.*

Todistus. Jos jokin logiikan ED (EDP) aksioomasysteemi $\vdash_{ED(P)}$ olisi sekä korrekti että täydellinen, niin olisi voimassa:

$$T \vdash_{ED(P)} \phi \Longleftrightarrow T \models_{ED(P)} \phi$$

kaikilla L-teorioilla T ja kaikilla L-lauseilla ϕ. Koska ($ED(P)$, L)-validien kaavojen joukko on Π^1_1-täydellinen, se ei ole lukuteoreettinen eikä siis myöskään rekursiivisesti numeroituva.$\dashv$

4.2. Δ-sulkeuma

Tässä jaksossa normaalisti tulkituista toisen kertaluvun kvanttoreista käytetään merkintöjä $\forall^S$ ja $\exists^S$. Tässä luvussa logiikkojen lauseet samaistetaan malliluokkien kanssa, eli esimerkiksi: $x \in EDP$ jos ja vain jos $x = \{\mathcal{M} | \mathcal{M} \models_{EDP} \psi$ ja ψ L_{SO}-lause $\}$.

Olkoon ϕ jokin kaava jossain logiikassa L ja esiintykööt relaatiomuuttujat $X_0, ..., X_n$ kaavassa ϕ vapaina. Jos on olemassa kaava ψ, jossa esiintyy relaatiomuuttujat $Y_0, ..., Y_m$ vapaina siten, että kaikilla äärettömillä L-malleilla $\mathcal{M}$ pätee, että $\mathcal{M} \models \exists^S X_0 ... \exists^S X_n \phi$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \models \forall^S Y_0 ... \forall^S Y_m \psi$, niin tällöin sanotaan, että luokka $\{\mathcal{M} | \mathcal{M} \models \exists^S X_0 ... \exists^S X_n \phi\} \in \Delta(L)$. Määritelmästä seuraa suoraan, että jos L on jokin kokoelma malliluokkia, niin $\Delta(\Delta(L)) = \Delta(L)$.

Δ-sulkeumaa on käsitelty Ebbinghausin artikkelissa [4] sivuilla 68-76 ja Jouko Väänäsen artikkelissa [8].

4.2.1. Totuusmääritelmien formalisointi

Tässä luvussa esitetään yleinen tulos, jonka mukaan, mikäli kahden logiikan totuusmääritelmät ovat formalisoitavissa toisissaan ja malli $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ on karakterisoitavissa molemmissa isomorfiaa vaille yksikäsitteisesti, niin niiden Δ-sulkeumat ovat samat. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, s tulkintajono ja S tulkintafunktio. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi käytetään merkintää X^S tarkoittamaan relaatiomuuttujan X tulkintaa mallissa $\mathcal{M}$ tulkintafunktiolla S ja vastaavasti merkintää x^s tarkoittamaan muuttujan x tulkintaa samassa mallissa tulkintajonolla s.

Oletetaan tästälähin, että L on jokin aakkosto ja L^* ja $L^\dagger$ joitakin logiikoita, joiden kaavat on muodostettu aakkostosta L. Olkoon f_{fml} injektio L-kaavojen joukolta joukolle $\mathbb{N}$ ja olkoon $\mathcal{M}$ L-malli, s tulkintajono ja S tulkintafunktio. Jos $\langle X^S, Y^S, Z^S, x^s, y^s\rangle \cong \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ja h isomorfismi edelliseltä mallilta jälkimmäiselle, niin merkintä $\lceil \phi \rceil$ tarkoittaa sitä alkiota $p \in M$, jolle $h(\lceil \phi \rceil) = f_{fml}(\phi)$.

L^*-kaava $C(X, J)$ *koodaa äärelliset alkiojonot*, mikäli se on ekvivalentti seuraavien kolmen ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavojen kanssa.

(C_0) $\quad \forall x \forall y \exists z \forall u (J(x, y, u) \leftrightarrow u = z)$
(C_1) $\quad \forall x \forall y \forall z \exists x_0 (J(x_0, y, z) \wedge \forall u \forall w (\neg u = y \wedge J(x_0, u, w)) \rightarrow J(x, u, w)))$
(C_2) $\quad \forall x \forall y \forall z (J(x, y, z) \rightarrow X(y))$

Ehdot ovat samat kuin äärellisten lukujonojen koodaukselle asetetut ehdot luvussa 3.1. Olkoon w tulkintajono, ϕ L^*-kaava, $\mathcal{M}$ L-malli, $maxvar(\phi) = max\{m \in \mathbb{N} | v_m$ esiintyy vapaana kaavassa $\phi\}$. Otetaan käyttöön seuraava merkintä: $w_\phi^{\mathcal{M}}$ on niiden joukon M alkioiden joukko, jotka ovat sellaisten alkiojonojen koodeja, joiden $maxvar(\phi)$ ensimmäistä alkiota ovat samat kuin äärettömässä jonossa w.

Oletetaan, että logiikassa $L^\dagger$ on olemassa kaava $\eta_{L^\dagger}(X, Y, Z, x, y)$, jolle pätee:

$$\mathcal{M} \models \eta_{L^\dagger}(X, Y, Z, x, y)\langle s, S\rangle \iff \langle X^S, Y^S, Z^S, x^s, y^s\rangle \cong \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle.$$

Tällöin sanotaan, että $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ on *karakterisoitavissa* logiikassa $L^\dagger$. Olkoon $\rho_n(Y, z, y)$ kaava, joka sanoo, että $z = \mathbf{n}^{\langle X^S, Y^S, Z^S, x^s, y^s\rangle}$.

Logiikka $L^\dagger$ on *formalisoitavissa* logiikassa L^*, mikäli on olemassa injektio $L^\dagger$-kaavojen joukolta joukolle $\mathbb{N}$ siten, että voidaan määritellä logiikan L^* kaava $\phi_{sat}^L(X, Y, Z, R, J, x, y)$ (R 2-paikkainen relaatiomuuttuja), joka riippuu aakkostosta L ja jolle pätee, että jos q on kaavan ϕ koodi, $\mathcal{M}$ L-malli, w on tulkintajono ja $p \in w_\phi^{\mathcal{M}}$, niin seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

(i) $\quad \mathcal{M} \models \eta_{L^*}(X, Y, Z, x, y) \wedge C(X, J) \wedge \phi_{sat}(X, Y, Z, R, J, x, y)$
joillakin X, Y, Z, J, x ja y, kun $R^S = \{(p, \lceil \phi \rceil) | \mathcal{M} \models \phi\langle w\rangle$ ja $p \in w_\phi^{\mathcal{M}}\}$ sekä

(ii) $\quad$ Jos $\mathcal{M} \models \eta_{L^*}(X, Y, Z, x, y) \wedge C(X, J) \wedge \phi_{sat}(X, Y, Z, R, J, x, y) \wedge$
$\rho_{\lceil \phi \rceil}(Y, z, y)$, niin $(p, \lceil \phi \rceil) \in R^{\mathcal{M}}$ jos ja vain jos $\mathcal{M} \models \phi\langle w\rangle$, kun $p \in w_\phi^{\mathcal{M}}$

Tällöin sanotaan, että kaava $\phi_{sat}(X, Y, Z, R, J, x, y)$ *formalisoi* logiikan $L^\dagger$ logiikassa L^*. Nämä ehdot vastaavat lauseissa 4.1.1 ja 4.1.2 todistettuja *ED(P)*-totuusmääritelmän formalisonnin ominaisuuksia.

Lause 4.2.1 *Olkoon L aakkosto ja olkoot L^* sekä $L^\dagger$ logiikoita joiden kaavat on muodostettu aakkostosta L ja oletetaan, että $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ voidaan karakterisoida logiikassa $L^\dagger$. Mikäli logiikka L^* on formalisoitavissa logiikassa $L^\dagger$, niin $L^* \subseteq \Delta(L^\dagger)$.*

Todistus. Oletetaan, että lauseen ehdot ovat voimassa. Väitetään, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(1) $\mathcal{M} \models \phi$

(2) $\mathcal{M} \models \forall^S X \forall^S Y \forall^S Z \forall^S R \forall^S J \forall^S x \forall^S y \forall^S w((\eta_{L'}(X, Y, Z, x, y) \wedge C(X, J) \wedge \phi_{sat}(X, Y, Z, R, J, x, y)) \rightarrow R(w, \underline{\lceil \phi \rceil}))$

(3) $\mathcal{M} \models \exists^S X \exists^S Y \exists^S Z \exists^S R \exists^S J \exists^S x \exists^S y \overline{\exists^S w}(\eta_{L'}(X, Y, Z, x, y) \wedge C(X, J) \wedge \phi_{sat}(X, Y, Z, R, J, x, y) \wedge R(w, \underline{\lceil \phi \rceil}))$.

eli $L^* \subseteq \Delta(L^\dagger)$. Implikaatio (1) $\Rightarrow$ (3) seuraa formalisoinnin määrittelevästä ehdosta (i) ja implikaatiot (3) $\Rightarrow$ (2) ja (2) $\Rightarrow$ (1) määrittelevästä ehdosta (ii). $\dashv$.

Korollaari 4.2.2 *Olkoon L aakkosto ja olkoot L^* sekä $L^\dagger$ logiikoita, joiden kaavat on muodostettu aakkostosta L ja oletetaan, että $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ voidaan karakterisoida sekä logiikassa L^* että $L^\dagger$. Mikäli logiikka L^* on formalisoitavissa logiikassa $L^\dagger$ ja kääntäen, niin $\Delta(L^*) = \Delta(L^\dagger)$.*

Todistus. Väite seuraa suoraan edellisestä lauseesta.$\dashv$

4.2.2 $\Delta(ED(P)) = \Delta(L(Q_0))$

Jotta voitaisiin osoittaa, että logiikoilla $L(Q_0)$ ja $ED(P)$ on sama Δ-sulkeuma, tarvitaan sekä mallin $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ karakterisointia molemmissa logiikoissa, logiikan $L(Q_0)$ formalisoimista logiikassa $ED(P)$ ja kääntäen logiikan $ED(P)$ formalisointia logiikassa $L(Q_0)$. Logiikassa $ED(P)$ luonnollisten lukujen struktuuri karakterisoidaan korollaarin 3.3.6. kaavalla θ_0. Logiikassa $L(Q_0)$ karakterisointi tapahtuu kaavalla $Q \wedge \neg\exists x Q_0 y \exists z(y \oplus z = x)$. Käytetään nyt molemmista kaavoista merkintää θ_0, koska jatkossa on asiayhteydestä selvä kumpaa kaavaa tarkoitetaan.

Korvataan nyt kaavassa θ_0 funktiosymbolit $\oplus$ ja $\otimes$ kolmipaikkaisilla relaatiomuuttujilla Y ja Z sekä vakiosymbolit $\mathbf{0}$ ja $\mathbf{1}$ muuttujasymboleilla x ja y, ja muodostetaan näin kaava $\beta_0(Y, Z, x, y)$. Olkoon $\eta_0(X, Y, Z, x, y)$ kaava, joka sanoo, että Y ja Z ovat totaalisia funktioita $X^2 \mapsto X$, $x, y \in X$ ja että $\beta_0(Y, Z, x, y)$ toteutuu. Siis pätee:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \eta_0(V_0^1, V_0^3, V_1^3, v_0, v_1)\langle s, S\rangle \\
&\iff \langle S(1,0), S(3,0), S(3,1), s(0), s(1)\rangle \cong \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle,
\end{aligned}$$

eli muuttujien X, Y, Z, x ja y tulkinnat toteuttavat kaavan η_0 jos ja vain jos ne muodostavat mallin, joka on isomorfinen luonnollisten lukujen standardimallin kanssa.

Logiikka $ED(P)$ formalisoidaan logiikassa $L(Q_0)$ samaan tapaan kuin jaksossa 4.1.2. Logiikan $L(Q_0)$ formalisointi logiikassa $ED(P)$ on on myös samanlainen, mutta lisäksi joudutaan käsittelemään kvanttori Q_0.

Olkoon ϕ_{Q_0} kaava, joka esittää seuraavaa relaatiota:

$$R_{Q_0} = \{(t, j, \ulcorner\psi\urcorner) | t = \ulcorner Q_0 v_j \psi \urcorner\}$$

Nyt voidaan määritellä kaava S_{Q_0}, joka 'käsittelee' totuusmääritelmästä kohdan Q_0. Kaava S_{Q_0} ilmaisee seuraavalla tavalla niiden alkioiden joukon äärettömyyden, joilla kaava $\phi(v_0)$ toteutuu mallissa $\mathcal{M}$: Kaikille mallin $\mathcal{M}$ alkiojonoille w_0 ja kaikille luonnollisille luvuille n pätee, että on olemassa tulkintajono w, joka toteuttaa kaavan $\phi(v_0)$, mutta millään $m < n$ ei ole voimassa, että $w[0] = w_0[m]$.

$$\begin{aligned}
S_{Q_0}(X, J, w, u, u_0, y_0):\quad &\phi_{Q_0}(u, y_0, u_0) \rightarrow (X(w, u) \leftrightarrow \forall w_0 \forall n \exists w (X(w, u_0) \\
&\wedge \forall m < n \neg \exists x (J(w_0, m, x) \wedge J(w, y_0, x))))
\end{aligned}$$

Nyt siis saadaan tulokseksi haluttu tulos:

Lause 4.2.3 $\Delta(L(Q_0)) = \Delta(ED(P))$.

Todistus. Seuraa suoraan edellisestä ja lauseesta 4.2.1. $\dashv$

4.2.3. *ED(P)* ei ole Δ-suljettu

Se, että *ED(P)* ei ole Δ-suljettu on seuraavien kahden lauseen välitön seuraus. Otetaan käyttöön seuraava merkintä:

$$\begin{aligned} M_{tr} = \{\mathcal{M} | \; & L^{\mathbb{N}} \cup \{r\}\text{-mallin } \mathcal{M} \text{ rajoittuma aakkostoon } L^{\mathbb{N}} \text{ on} \\ & \text{isomorfinen mallin } \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \text{ kanssa ja } r^{\mathcal{M}} = \underline{\ulcorner \phi \urcorner}^{\mathcal{M}} \text{ jollakin } \phi, \\ & \text{jolle } \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \phi. \end{aligned}$$

Lause 4.2.4 $M_{tr} \notin$*ED(P)*.

Todistus. Oletetaan, että olisi lause $\phi(b)$, joka määrittelisi malliluokan M_{tr}. Tällöin lukuteorian standardimallissa pätisi $\phi(t)$ kaikilla t, jotka ovat *ED(P)*-tosien lauseiden koodeja. Siis $\theta(v_0)$ määrittelisi *ED(P)*-tosien lauseiden joukon mallissa $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$. Osoitetaan diagonaalikonstruktiolla, että tämä on mahdotonta.

Olkoon

$$Tr = \{\ulcorner \phi \urcorner | \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \phi\}$$

ja oletetaan, että $\theta(v_0)$ määrittelee joukon $A \subseteq Tr$. Oletetaan, että muutujat v_0 ja v_1 eivät esiinny sidottuina kaavassa $\theta(v_0)$. Olkoon $\sigma(v_0, v_1, v_2)$ kaava, joka määrittelee sijoitusoperaation mallissa $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ ja jossa v_0 ja v_1 eivät esiinny sidottuina. Olkoon $\psi(v_0)$ seuraava kaava:

$$\neg \exists v_1 (\theta(v_1) \wedge \sigma(v_0, v_0, v_1)).$$

Oletetaan, että $k = \ulcorner \psi(v_0) \urcorner$. Nyt

$$\begin{aligned} & \ulcorner \psi(\mathbf{k}) \urcorner \in A \iff \\ & \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \theta(\underline{\ulcorner \psi(\mathbf{k}) \urcorner}) \iff \\ & \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \exists v_1 (\theta(v_1) \wedge v_1 = \underline{\ulcorner \psi(\mathbf{k}) \urcorner}) \iff \\ & \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \exists v_1 (\theta(v_1) \wedge \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}, v_1)) \iff \\ & \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \neg \psi(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

Siis $\ulcorner \psi(\mathbf{k}) \urcorner \notin A$, koska muuten pätisi sekä $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \psi(\mathbf{k})$ että $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \neg\psi(\mathbf{k})$. Siis $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \not\models_{ED(P)} \neg\psi(\mathbf{k})$. Joten $Tr \neq A$. $\dashv$

Lause 4.2.5 $M_{tr} \in \Delta($*ED(P)*$)$.

Todistus. Olkoon θ_0 kaava, joka karakterisoi luonnollisten lukujen struktuurin logiikassa *ED(P)* ja olkoon $S(X)$ kaava, joka 'sanoo', että X on *ED(P)*-totuuspredikaatti lukuteorian standardimallille. Tämä kaava rakennetaan samaan tapaan kuin luvussa 4.1.2. Kuten aiemmin, havaitaan, että seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:

(i) $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \phi$
(ii) $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \forall X(\theta_0 \wedge (S(X) \rightarrow \forall w(X(\underline{w, \ulcorner\phi\urcorner}))))$
(iii) $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1\rangle \models_{ED(P)} \exists X(\theta_0 \wedge S(X) \wedge \forall w(X(\underline{w, \ulcorner\phi\urcorner})))$

Siis kaavat $\forall X(\theta_0 \wedge (S(X) \rightarrow \forall w X(w, r)))$ ja $\exists X(\theta_0 \wedge S(X) \wedge \forall w X(w, r))$ karakterisoivat malliluokan M_{tr}.$\dashv$

5. Avoimia ongelmia

Konjektuuri 5.1.1 *Kvanttoria $L(Q_0)$ ei voi määritellä kummassakaan logiikoista ED ja EDP.*

Konjektuuri 5.1.2 *Olkoon $L = \{P, f, c\}$, missä P on yksipaikkainen predikaattisymboli, f yksipaikkainen funktiosymboli ja c vakiosymboli. Malliluokka $\{\mathcal{M} | (f^{\mathcal{M}})^n(c^{\mathcal{M}}) \in P^{\mathcal{M}}$, jollakin $n \in \mathbb{N}\}$ on määriteltävissä logiikassa ED, muttei logiikassa EDP.*

Edellisen konjektuurin seuraus on se, että logiikkojen *ED* ja *EDP* ilmaisuvoimat eivät suhtaudu toisiinsa kovin yksinkertaisesti (ainakaan *ED* $\subseteq$ *EDP* ei päde).

Ongelma 5.1.3 *Olkoon L annettu aakkosto. Tutkittava, mitä L-malliluokkia voidaan määritellä logiikoissa ED ja EDP ja mikä on logiikoiden ilmaisuvoimien välinen suhde. (Esim. päteekö ED $\subseteq$ EDP kyseiselle aakkostolle)*

Ongelma 5.1.4 *Olkoon L jokin logiikka. Tutkittava, mitä voidaan ilmaista logiikoissa, joissa sallitaan kvantifiointi logiikassa L määriteltävien relaatioiden yli ja selvitettävä millainen logiikkojen hierarkia näistä saadaan.*

Liite I: Kirjallisuusviitteet

[1] J.Barwise, S.Feferman (toim.), *Model-Theoretic Logics*, Springler-Verlag, 1985

[2] G.S.Boolos, R.C.Jeffrey, *Computability and Logic*, Press Syndicate of the University of Campridge, 1974

[3] C.C.Chang, J.Keisler, *Model Theory*, North Holland, 1973

[4] H.-D.Ebbinghaus, *Extended Logics: The General Framework*, [1] s. 25-76

[5] P.Lindström, *A note on weak second-order logic with variables for elementarily definable relations*, Proceedings of the Bertrand Russell Memorial Logic Conference, 1973, s. 221-233

[6] J.Väänänen, *Malliteoria*, luentomoniste, Helsingin Yliopisto, 1988

[7] J.Väänänen, *Matemaattinen logiikka*, Gaudeamus, 1987

[8] J.Väänänen, *Set-Theoretic Definability of Logics*, [1] s. 599-643.